NORTHEASTERN UNIVERSITY LIBRARY

Fascicule XIII

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COIMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), ETC.
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR

Henri VILLAT

Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris
Professeur à l'Université de Strasbourg

FASCICULE XIII.

Figures d'équilibre et Cosmogonie

PAR M. ALEX. VÉRONNET

Astronome à l'Observatoire de Strasbourg,
chargé de conférences à l'Université.

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1926

3
sc.13

Northeastern University
Library

MATH

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

77133-26 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
Quai des Grands-Augustins, 55.

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER) ETC.
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT
Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris,
Professeur à l'Université de Strasbourg.

FASCICULE XIII.

Figures d'équilibre et Cosmogonie

PAR M. ALEX. VÉRONNET
Astronome à l'Observatoire de Strasbourg,
chargé de conférences à l'Université.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1926

QH
2
M93
fasc. 13

1926

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en caractères gras figurant entre crochets dans le courant du texte renvoient à cette Bibliographie.

FIGURES D'ÉQUILIBRE ET COSMOGONIE

Par M. Alex. VÉRONNET,

Astronome à l'Observatoire de Strasbourg
chargé de conférences à l'Université.

PRÉFACE.

Les travaux mathématiques, qui se trouvent résumés ici, se rapportent aux différentes questions traitées par Henri Poincaré dans les *Figures d'équilibre d'une masse fluide* et dans les *Hypothèses cosmogoniques*. Ce sont celles qui se posent à propos de l'équilibre physique, de la constitution, de l'évolution et de la formation des astres et de l'Univers. Ce sont bien les problèmes fondamentaux de l'Astronomie moderne.

Les indications bibliographiques ont été classées d'après les numéros de l'ouvrage, dont chacun traite un problème distinct. La bibliographie complète du premier Chapitre se trouve à la fin du Tome 4 du *Traité de Mécanique* de M. P. Appell, celle du second Chapitre dans ma Thèse de doctorat (*Journ. de Math.*, 1912).

Pour les trois premiers Chapitres on trouvera également une bibliographie assez complète dans l'article de S. Oppenheim de l'*Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, B. VI, 2,21. Cependant il ne dit rien de la limite fondamentale de l'aplatissement de la Terre, déterminée par H. Poincaré, ni des travaux qui s'y rapportent, en première et en seconde approximation.

CHAPITRE I.

FIGURES D'ÉQUILIBRE D'UN LIQUIDE HOMOGÈNE EN ROTATION.

Dans ce problème, on considère une masse fluide homogène de densité ρ, qui tourne autour d'un axe fixe, avec une vitesse angulaire ω, isolée dans l'espace et soumise seulement à l'attraction réci-

261937

proque de toutes ses parties. Il s'agit d'étudier la figure d'équilibre relatif que prendra la surface extérieure de la masse, par rapport à des axes tournant avec elle, en bloc. On trouve des figures ellipsoïdales de révolution, ou à trois axes, et des figures irrégulières dérivées de ces ellipsoïdes.

I. **Les figures ellipsoïdales d'équilibre. Ellipsoïdes de Maclaurin et ellipsoïdes de Jacobi. Formules générales.** — Les formules d'hydrostatique permettent d'écrire immédiatement l'équation de l'équilibre d'une molécule située à la distance x, y, z de l'origine, où la pression est p et le potentiel dû à l'attraction égal à V,

$$dp = \rho(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) + \omega^2\rho(x\,dx + y\,dy), \tag{1}$$

$$\frac{p}{\rho} = fV + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) + \text{const.} \tag{1'}$$

Les surfaces de niveau ou d'égale pression s'obtiennent en faisant p constant. Cette formule, déduite de l'équation différentielle, suppose ρ et ω constants.

La surface extérieure d'équilibre peut être ellipsoïdale. En effet, le potentiel en un point intérieur est alors

$$V = \pi abc\rho\int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{c^2+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}, \tag{2}$$

$$\varphi(\lambda) = (a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda). \tag{3}$$

Les composantes de la force d'attraction sont

$$X = f\frac{\partial V}{\partial x} = -Px, \qquad P = 2\pi fabc\rho\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}, \qquad \ldots, \tag{4}$$

et des expressions analogues pour Y, Z et pour Q, R.

L'équation des surfaces de niveau devient alors

$$(P - \omega^2)x^2 + (Q - \omega^2)y^2 + Rz^2 = C. \tag{5}$$

Ce sont des surfaces du second ordre, homothétiques et concentriques. Comme la surface libre doit être une surface de niveau, ses axes a, b, c doivent être proportionnels à ceux de la quadrique (5), d'où

$$a^2(P - \omega^2) = b^2(Q - \omega^2) = c^2R. \tag{6}$$

On obtient finalement deux équations de conditions, qui sont

nécessaires et suffisantes pour que la surface d'équilibre soit un ellipsoïde,

$$(7) \qquad \omega^2 = \frac{a^2 P - c^2 R}{a^2}, \qquad \frac{a^2 P - c^2 R}{a^2} = \frac{b^2 Q - c^2 R}{b^2}.$$

P, Q, R ne dépendent que de la valeur des axes a, b, c, ou du rapport des deux premiers au troisième si la masse est donnée. La vitesse de rotation est donc bien indépendante de la position du point considéré et la même partout.

La première formule (7) détermine la vitesse de rotation qui correspond à un ellipsoïde donné.

Dans la seconde formule (7) on peut mettre $b^2 - a^2$ en facteur, d'après (4). On aura deux solutions, les ellipsoïdes de révolution $b = a$ et les ellipsoïdes à trois axes. Les ellipsoïdes de révolution sont assujettis seulement à la première condition, qui détermine la vitesse de rotation en fonction du rapport des deux axes ou réciproquement. Pour les ellipsoïdes à trois axes, la seconde formule (7) détermine une équation de condition, qui donne l'un des rapports d'axes en fonction de l'autre.

Les valeurs P, Q, R données par (4) et portées dans (7) montrent immédiatement que le plus petit axe de l'ellipsoïde doit coïncider avec l'axe de rotation, pour que ω^2 soit positif.

Les figures d'équilibre qui sont des ellipsoïdes de révolution sont appelées *ellipsoïdes de Maclaurin* et les ellipsoïdes à trois axes sont appelés *ellipsoïdes de Jacobi*, du nom des mathématiciens qui en ont fait la démonstration.

2. Première discussion. Vitesse de rotation variable et densité constante ou réciproquement. — Pour les ellipsoïdes de Maclaurin, il est avantageux d'introduire le paramètre l qui ne dépend que du rapport des axes. La formule (7) devient

$$(8) \qquad h = \frac{\omega^2}{2\pi f \rho} = \frac{(3 + l^2) \operatorname{arc\,tang} l - 3l}{l^3}, \qquad l^2 = \frac{a^2 - c^2}{c^2}.$$

La densité ρ étant donnée, cette formule montre immédiatement que la vitesse de rotation d'équilibre ω dépend seulement du rapport des axes, et non de leur grandeur ou de la masse totale.

Pour les ellipsoïdes à trois axes on pose

$$(9) \quad \lambda = c^2 x, \qquad s = \frac{c^2}{a^2}, \qquad t = \frac{c^2}{b^2}, \qquad D^2 = (1 - x)(1 + sx)(1 + tx)$$

et les deux équations de condition (7) prennent la forme

$$h = \frac{\omega^2}{2\pi f \rho} = st \int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+sx)(1+tx)\,D}, \tag{10}$$

$$\psi(s, t) = (1 - s - t) \int_0^\infty \frac{x\,dx}{D^3} - st \int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{D^3} = 0. \tag{11}$$

Pour les ellipsoïdes de révolution, il est facile d'étudier la variation de h en fonction de l. A partir de $l = 0$ (cas de la sphère, où l'on a $h = 0$), h croît avec l jusqu'à un maximum

$$h_0 = 0{,}224 \qquad \text{pour} \qquad l_0 = 2{,}53,$$

puis décroît et tend vers zéro quand l tend vers l'infini (cas de l'ellipsoïde aplati en disque). En prenant s comme variable ($s = 1$, cas de la sphère) h atteint son maximum pour $s_0 = 0{,}135$ et tend vers zéro pour $s = 0$ et $s = 1$.

A chaque valeur de h correspondent deux valeurs de l ou de s, et par conséquent deux ellipsoïdes de révolution d'aplatissements différents.

Pour les ellipsoïdes à trois axes, la formule (11) montre que l'équation de condition est vérifiée pour $s = 0$ et $t = 1$, ou réciproquement ($a = \infty$ et $b = c$, ellipsoïde infiniment allongé en forme d'aiguille). Les paramètres s et t varient ensuite en sens inverse et deviennent égaux, pour les valeurs

$$s_1 = t_1 = 0{,}3396, \qquad h_1 = 0{,}1871,$$

où les ellipsoïdes à trois axes rejoignent les ellipsoïdes de révolution. Ici chaque valeur de h donne, non pas deux ellipsoïdes, mais deux valeurs de s et t, qui donnent le même ellipsoïde.

Pour les ellipsoïdes de Jacobi, la vitesse de rotation décroît toujours alors que s tend vers 0 et t vers 1. Le grand axe tend vers l'infini. L'axe moyen se rapproche du petit axe. L'ellipsoïde à trois axes tend vers une aiguille ronde très allongée.

Pour les faibles vitesses de rotation, telles que l'on ait $h < 0{,}1871$ il y a deux ellipsoïdes de Maclaurin et un ellipsoïde de Jacobi, comme figures d'équilibre possibles. Il y a trois figures limites pour une masse sans rotation : la sphère, le disque infiniment aplati et l'aiguille infiniment allongée. La sphère seule est stable.

Pour $0{,}1871 < h < 0{,}224$ on a deux ellipsoïdes de révolution et

pour $h > 0{,}224$, il n'y a plus d'ellipsoïdes comme figures d'équilibre possibles.

Sur cette question, Maclaurin n'avait traité que le cas d'aplatissements très petits. Simpson avait calculé ensuite un tableau de valeurs successives de la rotation et de l'aplatissement d'où ressortait un maximum de la vitesse de rotation. D'Alembert a établi et discuté la formule en h, reprise par Laplace. Ivory a donné l'expression de h en sinus, forme des auteurs anglais. Enfin Liouville a fait la discussion pour les ellipsoïdes à trois axes.

Tchebytcheff avait posé à Liapounoff le problème de savoir ce qui se passerait si la vitesse de rotation dépassait sa valeur maximum (problème de Tchebytcheff). Il ne se passerait rien du tout. En réalité ce qu'on communique à une masse dont on augmente la vitesse de rotation, c'est un moment cinétique, une quantité d'énergie. Or la discussion suivante montre que le moment cinétique n'a pas de maximum. L'ellipsoïde correspondant au maximum de ω n'est qu'un ellipsoïde comme un autre, à partir duquel le moment d'inertie croît plus vite que le moment cinétique, alors la vitesse de rotation est obligée de diminuer. C'est le point de bifurcation qui est le point vraiment intéressant. Du moins c'est l'étude du problème de Tchebytcheff qui a permis à Liapounoff de trouver d'autres points de bifurcation, d'autres séries de figures dérivées des ellipsoïdes.

3. **Deuxième discussion. Moment cinétique constant et variation de la densité.** — Laplace a fait remarquer qu'au point de vue pratique de l'évolution des astres le moment cinétique reste constant, quand la densité augmente. Il a fait les calculs et la discussion, pour les ellipsoïdes de révolution, en prenant ce moment $\mu = I\omega$ comme paramètre, et Liouville pour les ellipsoïdes à trois axes.

On obtient les deux formules suivantes pour les deux séries d'ellipsoïdes, de révolution et à trois axes,

$$k = \frac{50\mu^2}{3fM^3}\left(\frac{4\pi\rho}{3M}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}h(1+l^2)^{\frac{2}{3}}, \tag{12}$$

$$k = \frac{50\mu^2}{3fM^3}\left(\frac{4\pi\rho}{3M}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{(s+t)^2}{(st)^{\frac{1}{3}}}h, \qquad \psi(s,t) = 0. \tag{13}$$

La fonction k remplace l'expression h de la discussion précédente. L'équation de condition ψ reste la même. Comme μ et M, la masse,

sont constants, on voit que la densité ρ varie dans le même sens que h et réciproquement. On démontre que pour les deux séries d'ellipsoïdes cette fonction croît indéfiniment quand l croît de zéro à l'infini, ou quand s varie de 1 à 0.

Pour les ellipsoïdes de révolution, l'aplatissement augmente indéfiniment avec h ou ρ. La limite du disque aplati n'est atteinte qu'avec une densité infinie ou un moment de rotation infini. On a un ellipsoïde et un seul pour chaque valeur de la densité et de l'aplatissement.

La courbe des ellipsoïdes à trois axes est aussi indéfiniment croissante. On obtient une aiguille indéfiniment allongée, quand la densité, ou le moment de rotation, augmente indéfiniment.

Kostka calcule que, pour la même vitesse de rotation, la figure d'équilibre de la Terre, en ellipsoïde à trois axes, aurait des longueurs d'axes correspondant à 1, à 1,002 et 52,44, aiguille à section sensiblement circulaire. Mais le moment cinétique de rotation serait 26 fois plus grand que celui de la Terre.

4. **Troisième discussion. Variation du grand axe avec moment de rotation constant.** — En introduisant le grand axe a au lieu de la densité j'ai obtenu la détermination de la grandeur des figures, en même temps que de leur forme. On a pour les deux séries

$$g = \frac{50}{3fM^3}\frac{\mu^2}{a} = 4h(1+l^2), \tag{14}$$

$$g = \frac{50}{3fM^3}\frac{\mu^2}{a} = \frac{(s+t)^2}{st}\frac{h}{\sqrt{t}}. \tag{15}$$

Pour les ellipsoïdes de révolution g croît toujours jusqu'à 2π, où l'on a le disque aplati. Le grand axe décroît sans cesse, mais jusqu'à un minimum

$$a_0 = \frac{25}{3fM^3}\frac{\mu^2}{\pi}. \tag{16}$$

Pour les ellipsoïdes à trois axes, $g = g_0 = 1,227$ décroît d'abord, jusqu'à $g_1 = 1,18$ puis croît indéfiniment. Le grand axe, à partir de la bifurcation, croît d'abord jusqu'à un maximum, puis décroît indéfiniment, ainsi que les deux autres axes. L'aiguille allongée, limite de ces ellipsoïdes, serait indéfiniment évanouissante.

Pour de faibles aplatissements, le produit ae reste constant. L'aplatissement varie en raison inverse du rayon équatorial. En supposant

la Terre et la Lune réunies, avec leur moment cinétique total, l'aplatissement ne serait encore que de $\frac{1}{12}$, de l'ordre de celui de Jupiter. Le point figuratif serait très loin du point de bifurcation de Jacobi.

Pour atteindre ce point, il faudrait que la Terre se contracte de plus de 100 fois son rayon, Jupiter de 5,7 et Saturne de 3,2 fois, ou que la vitesse de rotation de la Terre soit 3 fois plus grande.

A la limite de contraction, la Terre se réduirait à un disque de $9^{km},4$ de rayon faisant 5,35 tours par seconde.

5. **Les figures dérivées des ellipsoïdes de révolution.** — H. Poincaré et Liapounoff ont montré, à peu près en même temps, qu'il y avait, dans les deux séries de figures d'équilibre, une infinité d'*ellipsoïdes critiques*, qui pouvaient se déformer en donnant d'autres figures d'équilibre différentes, *dérivées* de ces ellipsoïdes en ces *points de bifurcation*. On les appelle aussi *figures de Poincaré*.

Le problème est traité au moyen des fonctions de Lamé, qui sont une généralisation des fonctions sphériques étendues à l'ellipsoïde. Les coordonnées elliptiques ρ, μ, ν remplacent les coordonnées sphériques r, θ, φ. On distingue les fonctions R en ρ, où chaque valeur de ρ détermine un ellipsoïde, et les fonctions M et N en μ et en ν, qui déterminent un hyperboloïde à une nappe et un à deux nappes, orthogonaux à l'ellipsoïde et entre eux. L'équation différentielle qui détermine R donne également une fonction de Lamé de seconde espèce S.

On exprime au moyen des fonctions de Lamé l'épaisseur, en chaque point d'un ellipsoïde, d'une couche de déformation infiniment mince, qui transforme l'ellipsoïde en une figure voisine. Cette couche, ajoutée en certaines régions, retranchée en d'autres, doit donner une masse nulle. C'est l'extension à l'ellipsoïde de la théorie des sphéroïdes de Laplace.

On exprime de même le potentiel de cette couche mince. Ajouté à celui de l'ellipsoïde il doit vérifier les conditions d'équilibre, dans le cas des figures dérivées. Les ellipsoïdes qui vérifient cette relation seront les ellipsoïdes critiques ou de bifurcation.

Les trois premières fonctions de Lamé, du premier ordre en ρ, sont, avec les notations de Poincaré,

$$(18) \qquad R_1 = \sqrt{\rho^2 - a^2}, \qquad R_2 = \sqrt{\rho^2 - b^2}, \qquad R_3 = \sqrt{\rho^2 - c^2},$$

et celles du second ordre

$$(19) \qquad R_4 = \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}, \qquad R_7 = \rho^2 - \alpha, \qquad R_8 = \rho^2 - \alpha'.$$

L'équation de condition pour les ellipsoïdes critiques de révolution s'écrit

$$(20) \qquad \frac{R_k S_k}{2n+1} = \frac{R_1 S_1}{3},$$

où R_k est une des $2n+1$ fonctions de Lamé d'ordre n.

Mais dans le cas des ellipsoïdes de révolution, ces fonctions dégénèrent en fonctions sphériques et R_k sera un polynome sphérique X_n^p d'ordre n.

L'épaisseur ξ de la couche infiniment mince, qui donne une nouvelle figure d'équilibre est définie par

$$(21) \qquad \xi = l_0 \beta X_n^p \cos p\varphi,$$

φ est la longitude et $\cos p\varphi$ la dégénérescence de la fonction N. On obtient trois sortes de figures dérivées. Pour $p = 0$ et n pair, ξ s'annule sur n parallèles. Les zones comprises entre ces parallèles sont alternativement renflées et déprimées. On obtient les figures à cannelures ou *figures zonales*. La seconde, $n = 4$, donne la figure de l'expérience de Plateau, qui se creuse pour détacher un anneau équatorial.

Pour $p = n$, ξ s'annule le long de n méridiens, en produisant des renflements analogues aux côtes d'un melon, *figures sectoriales*. Dans les autres cas, on a des dépressions et renflements à la fois sur les parallèles et sur les méridiens, *figures tesserales*.

6. **Figures dérivées des ellipsoïdes à trois axes. La figure piriforme ou ovoïde.** — Les ellipsoïdes de bifurcation sont déterminés par les deux conditions suivantes :

$$(22) \qquad \frac{R_n S_n}{2n+1} = \frac{R_4 S_4}{5} = \frac{R_1 S_1}{3}.$$

Pour chaque valeur de n il n'y a qu'une valeur de R et qu'un ellipsoïde qui soit solution.

Cette équation transcendante ne peut être résolue que par des développements en série, après avoir exprimé d'abord S_n en fonction

de R_n. Ces calculs numériques, longs et pénibles, ont été faits d'abord par G.-H. Darwin sur les formules de Poincaré, et par Liapounoff. P. Humbert a donné une expression beaucoup plus simple de RS en fonction de R [1].

L'épaisseur de la couche de déformation est donnée par

$$\xi = l_0 \varepsilon \mathrm{RMN}, \tag{23}$$

où l_0 et ε sont des constantes et M et N ont les mêmes racines que celles de R. Les intersections de surfaces $\xi = 0$ avec l'ellipsoïde critique déterminent les lignes de déformation, où la nouvelle figure s'articule avec l'ellipsoïde.

Le premier ellipsoïde de bifurcation se trouve pour $n = 3$

$$\mathrm{R} = \sqrt{\rho^2 - c^2}(\rho^2 - \alpha), \tag{24}$$

$$\xi = l_0 \varepsilon z \left(\frac{x^2}{\alpha - a^2} + \frac{y^2}{\alpha - b^2} + \frac{z^2}{\alpha - c^2} - 1 \right). \tag{25}$$

Cet ellipsoïde de bifurcation est déjà très allongé, car l'axe de rotation n'est que le tiers du grand axe. G.-H. Darwin a déterminé sa forme exacte, ainsi que la figure dérivée. Elles se coupent pour $z = 0$, et sur l'intersection, avec l'ellipsoïde, de l'hyperboloïde à deux nappes donnée par la parenthèse de (25). P. Humbert a démontré que cette figure n'avait pas de points d'inflexion. Elle se renfle d'un côté et s'amincit de l'autre. H. Poincaré avait cru qu'elle s'étranglait assez pour prendre la forme d'une poire, d'où le nom de figure piriforme. Elle a plutôt une forme ovoïde.

L'ellipsoïde critique suivant, $n = 4$, détermine deux figures dérivées, comme toutes les figures paires, l'une en haltère, présentant deux renflements aux extrémités, et une autre présentant deux dépressions.

7. **Les limites de la vitesse de rotation et de la force centrifuge.** — Poincaré a établi le premier une limite de l'expression h, qui doit être réalisée en toute hypothèse, pour n'importe quelle figure, que peut prendre un liquide homogène en rotation. Il faut $h < 1$, autre-

---

[1] Chacun de ces auteurs a des notations spéciales et dissymétriques. Les notations symétriques de Poincaré ont été conservées jusqu'au bout dans les n°s 83 et 84 de M. Appell (*Traité de Mécanique rationnelle*, t. 4).

ment la résultante des forces serait dirigée vers l'extérieur. Crudeli, au moyen également de la formule de Green, abaisse cette limite à $\frac{1}{2}$.

La limite de h pour les ellipsoïdes est 0,224, elle est $\frac{1}{2}$ et 1 pour le cylindre elliptique. Lichtenstein démontre que la condition de Crudeli est toujours réalisée, si la figure extérieure est convexe.

Zeipel, en faisant la différence entre l'attraction et la force centrifuge à l'équateur des ellipsoïdes de révolution, établit que cette quantité reste positive si $h < 4:9$, ce qui a lieu pour les ellipsoïdes.

J'ai montré que le rapport de la force centrifuge à l'attraction est toujours plus petit que 1 pour les ellipsoïdes hétérogènes, aussi bien que pour les ellipsoïdes homogènes. La force centrifuge ne tendrait à égaler l'attraction que pour les figures limites du disque aplati et de l'aiguille allongée.

8. **Stabilité des figures d'équilibre.** — Aux points de bifurcation il y a deux figures d'équilibre possibles. Pratiquement la masse optera pour la forme la plus stable. La détermination de la stabilité indiquera donc la forme que prendra réellement le liquide en rotation.

Le problème dépend d'une infinité de paramètres et est extrêmement compliqué. Tait et Thomson (Lord Kelvin) ont distingué la stabilité séculaire ou permanente et la stabilité temporaire. Cette dernière, ou stabilité à l'instant t, serait permanente s'il n'y avait pas de frottements, exemple la toupie.

Ils ont distingué également les forces positionnelles, qui ne dépendent que de la position des points, et qui donnent des systèmes conservatifs. La stabilité y est définie par le théorème de Lejeune-Dirichlet. Il faut et il suffit que la fonction de forces U soit maximum. Si le mouvement dépend de n paramètres q, il est défini autour d'une position d'équilibre par les n équations

$$(26) \qquad q_1'' = \alpha_1 q_1, \qquad q_2'' = \alpha_2 q_2, \qquad \ldots \qquad q_n'' = \alpha_n q_n.$$

Si les α sont tous négatifs, l'équilibre est absolument stable, oscillations. Si 1 ou k des α sont positifs, la position aura 1 ou k degrés d'instabilité.

Ils distinguent encore les forces motionnelles dissipatives, dirigées dans le sens de la vitesse, comme le frottement. Elles ne modifient pas la nature de l'équilibre, mais amortissent les oscillations. Enfin

les forces gyroscopiques, normales à la vitesse, peuvent rendre stable un équilibre instable.

Dans le cas du fluide tournant la fonction de forces est

$$(27) \qquad U = W + \frac{1}{2} I \omega^2 = W + \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{I} = W + T.$$

Thomson démontre que, dans le cas général, pour que l'équilibre soit stable, il faut et il suffit que U soit maximum.

Poincaré remarque que dans le cas d'un fluide isolé il n'y a pas de frottement et il montre alors que la condition nécessaire et suffisante de la stabilité est que U′ soit maximum,

$$(28) \qquad U' = W - \frac{1}{2} I \omega^2 = W - \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{I} = W - T;$$

cette formule ne s'applique plus dans le cas de la figure piriforme, car la déformation introduit des frottements. Poincaré donne une autre condition applicable.

Liapounoff a donné une autre condition plus étroite, qui détermine la stabilité par le maximum de $U = W - \frac{\mu^2}{I} = W - 2T$. Cette dernière expression se ramène à celle du théorème du viriel de Clausius $2T + V$, car dans le cas de forces de gravitation $V = - W$.

Schwartzschild donne une autre condition. De deux formes d'équilibre possibles, la plus stable est celle dont le moment d'inertie I est le plus grand. Elle se ramène à celle de Liapounoff.

Poincaré montre que c'est l'expression même qui définit les ellipsoïdes critiques, formule (22), qui joue le rôle des coefficients α des équations (26), *coefficients de stabilite*. Cette expression s'annule au point de bifurcation. Si elle devient positive sur une branche, pour une figure, celle-ci prendra un degré d'instabilité, l'autre non.

Il démontre que les ellipsoïdes de révolution sont stables jusqu'à la bifurcation avec les Jacobi. Ensuite ce sont les ellipsoïdes à trois axes qui sont stables, jusqu'au point de bifurcation avec la figure piriforme. Ici les deux figures prennent un degré d'instabilité, sont toutes deux instables. Il est vrai que les figures conservent la stabilité temporaire. S'il n'y a pas de frottement, comme c'est le cas pour une masse isolée, la stabilité reste permanente, pour tous les ellipsoïdes de révolution et tous les ellipsoïdes à trois axes.

L'instabilité de la figure piriforme, ou ovoïde, en particulier a

suscité de longs débats contradictoires et les travaux de G.-H. Darwin, Liapounoff, Benès, Jeans, Humbert.

D'Alembert avait déjà démontré que pour les deux ellipsoïdes de révolution, correspondant à une vitesse de rotation donnée, le plus aplati est instable, mais Airy fait remarquer que pour un moment cinétique donné il n'y a qu'un ellipsoïde d'équilibre et qu'il est constamment stable. Liapounoff montre que les coefficients de stabilité sont tous négatifs pour la *sphère*, et que la sphère est une figure absolument stable. Poincaré en donne une autre preuve. J'ai montré que pour une masse hétérogène aucune surface de niveau ne pouvait être sphérique, sans que toutes le soient, et alors la vitesse de rotation devait être nulle partout.

9. **Dédoublement et cosmogonie.** — L'expérience de Plateau réalise le fractionnement d'une masse homogène en rotation. Mais c'est la tension superficielle, et non l'attraction qui agit ici. De plus on communique à la masse une énergie de rotation croissante. Il n'y a aucune analogie avec les corps célestes.

Les ellipsoïdes de révolution, ou les figures dérivées des ellipsoïdes, pourraient se creuser et s'étrangler. Poincaré le croyait pour la figure piriforme. On a montré ensuite qu'elle n'avait pas de point d'inflexion. Pratiquement le moment cinétique des corps célestes est beaucoup trop faible. La Terre, en lui ajoutant le moment cinétique de la Lune, serait encore très éloignée du point de bifurcation des Jacobi. En remontant dans le passé, avec une dilatation plus grande on s'en éloigne encore. Il faut ajouter des hypothèses accessoires pour opérer le fractionnement, les marées d'un astre perturbateur par exemple, comme le fait G.-H. Darwin. J.-H. Jeans ne croit pas que le fractionnement ait joué un rôle dans le système solaire, mais seulement dans le cas d'un moment cinétique plus grand (étoiles doubles), ou de masses plus grandes (nébuleuses spirales).

Pour qu'il y ait fractionnement, il faudrait que la force centrifuge arrive à égaler l'attraction. Cela n'a lieu, pour les ellipsoïdes, qu'aux limites, densité infinie ou moment cinétique infini. Il faudrait démontrer que cela a lieu avant, pour les autres figures. Le fractionnement se reproduirait périodiquement. On aurait un chapelet d'astres dérivés d'une masse primitive.

Quand bien même une masse en rotation arriverait à une forme

instable, on ne peut pas en conclure qu'elle va se fractionner nécessairement. L'instabilité n'est que du premier degré et en l'absence de frottement la stabilité persiste. Il y aurait une étude intéressante à faire sur la possibilité et les conditions du fractionnement pour la figure de l'expérience de Plateau, ellipsoïdes de révolution, et pour la figure en haltère, ellipsoïdes à trois axes. Il faudrait ensuite étudier ce qui se passe pour une masse hétérogène, où la figure ellipsoïdale est impossible et où la masse se creuse sur le parallèle de 45°.

10. Le cylindre elliptique indéfini. — Mathiessen (1857) a établi qu'un cylindre elliptique indéfini pouvait être une figure d'équilibre pour une masse liquide tournant autour de l'axe du cylindre. Globa Mikaïlenko, après J.-H. Jeans, en a étudié les formes et les figures dérivées des ellipsoïdes, en introduisant aussi la considération de la capillarité.

L'équation de condition est la même que celle des ellipsoïdes à trois axes (6), où $R = 0$. On a pour h et k

$$(12) \qquad h = \frac{\omega^2}{2\pi f \rho} = \frac{2ab}{(a+b)^2}, \qquad k = \frac{4\mu^2}{f M^3} = \left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)^2,$$

où M est la masse d'une tranche, $\pi\rho abe$, d'épaisseur e. On aurait d'ailleurs les mêmes équations et les mêmes résultats pour un disque elliptique d'épaisseur constante infiniment mince.

Pour $a = b$ les équations de condition sont toujours satisfaites. C'est le cas correspondant aux ellipsoïdes de révolution. Il y a toujours une figure circulaire qui est figure d'équilibre. Cependant pour $h > 1$ la force centrifuge l'emporterait sur l'attraction. D'ailleurs h atteint sa valeur maximum $\frac{1}{2}$ pour $b = a$ et tend vers zéro à mesure que la section elliptique s'aplatit. La force centrifuge est toujours plus petite que l'attraction, même quand la limite de Crudeli est atteinte, $h = \frac{1}{2}$.

CHAPITRE II.

FIGURES D'ÉQUILIBRE D'UNE MASSE HÉTÉROGÈNE. FIGURE DE LA TERRE ET DES PLANÈTES.

Dans le cas d'une masse hétérogène, composée de couches de densité différentes, le problème est moins avancé que pour une masse

homogène. On a cependant étendu à ce problème quelques résultats généraux du précédent, et surtout on a pu, dans le cas d'une rotation faible, traiter assez complètement l'étude de la forme de la Terre et en déduire différentes connaissances sur l'état des densités et des vitesses à l'intérieur. Le problème, traité par Clairaut, a pris toute son importance, vers 1880, avec les mesures précises de l'aplatissement et il a été renouvelé par H. Poincaré, qui a déterminé une limite mathématique précise de l'aplatissement.

11. Étude du cas général. Résultats de M. Hamy. — On suppose que les surfaces de niveau sont toutes ellipsoïdales. L'attraction en un point x, y, z est la somme des actions des couches de densité ρ et d'épaisseur da, db, dc (Clairaut). M. Hamy obtient des formules plus pratiques, ramenées à celles des ellipsoïdes homogènes, en considérant l'action de l'ellipsoïde homogène de densité $d\rho$, d'axes $a_1 - da$, $b_1 - db$, $c_1 - dc$ et ainsi de suite. J'ai montré que ces formules se ramènent les unes aux autres par une simple intégration par parties.

L'équilibre dynamique des surfaces d'égale densité (résultante des forces normales à la surface) donne la même équation de condition que pour les ellipsoïdes homogènes, mais qui doit être vérifiée pour chaque surface de niveau,

$$a^2(P - \omega^2) = b^2(Q - \omega^2) = c^2 R. \tag{1}$$

L'équilibre hydrostatique est également vérifié, si la vitesse de rotation est uniforme. Mais ici P, Q, R, et par conséquent ω, sont fonctions du point x, y, z. M. Hamy démontre que les ellipsoïdes doivent être homofocaux, pour que cette valeur soit constante sur une même surface de niveau. Ceci paraît d'ailleurs immédiat d'après le théorème d'Ivory. Il démontre ensuite qu'ils devraient être homothétiques pour que ω ne varie pas d'une couche à l'autre. Il en conclut que les surfaces de niveau ne peuvent pas être des surfaces ellipsoïdales dans un fluide hétérogène, qui tourne tout d'une pièce, c'est-à-dire en équilibre permanent. H. Poincaré, Volterra ont démontré que les surfaces de niveau ne pouvaient pas être homothétiques.

M. Hamy avait considéré seulement des couches discontinues. J'ai traité le cas d'une variation continue des densités, considéré le cas où chaque anneau de molécules tourne avec une vitesse quelconque

autour d'un même axe et déterminé dans ce cas la loi de variation des vitesses en latitude et en profondeur pour que les surfaces de niveau soient ellipsoïdales. Elles sont reliées à la variation des axes par la formule

$$(2) \qquad \frac{\partial \omega^2}{\partial c} + 2c\frac{\partial \omega^2}{\partial z^2} = \mathrm{R}\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{c^2}{a^2}\right).$$

La formule (1) détermine deux valeurs de la vitesse de rotation. Le développement en fonction du rapport des axes montre qu'elles ne peuvent être égales, même pour de faibles vitesses, que si $b = a$. Il faut que les ellipsoïdes soient de révolution (Hamy).

La condition générale de l'équilibre hydrostatique s'écrit alors

$$(3) \qquad -\frac{dp}{\rho} = (\mathrm{P} - \omega^2)\, x\, dx + \mathrm{R}\, z\, dz.$$

La variation de pression est nulle sur les ellipsoïdes

$$(\mathrm{P} - \omega^2)\, x^2 + \mathrm{R}\, z^2 = \text{const.}, \qquad \text{si} \qquad \frac{\mathrm{P} - \omega^2}{\mathrm{R}} = \frac{c^2}{a^2} = \text{const.}$$

Cette dernière condition n'est pas autre chose que la formule (1) qui détermine la vitesse de rotation en chaque point, nécessaire pour que les surfaces de niveau soient ellipsoïdales, dans l'équilibre hydrostatique, en négligeant le frottement. Si tous les ellipsoïdes sont homofocaux, P, Q, R sont constants, la vitesse de rotation est constante sur chaque couche de niveau, qui tourne chacune tout d'une pièce. La formule ci-dessus donne alors la variation des vitesses des couches en profondeur.

M. Hamy a fait la discussion des figures d'équilibre d'une masse hétérogène de révolution formée d'ellipsoïdes homofocaux, et j'ai fait celle des ellipsoïdes homothétiques, en prenant la vitesse de rotation comme paramètre.

La vitesse centrale, dans le cas des ellipsoïdes homothétiques, en fonction de l'aplatissement, est la même que celle de l'ellipsoïde homogène qui aurait la même densité que la densité centrale. La vitesse superficielle aurait une variation analogue. Toutes les vitesses des ellipsoïdes homothétiques sont comprises entre les vitesses des ellipsoïdes homofocaux.

Il serait intéressant de compléter ce travail par la discussion des

deux autres cas, moment cinétique constant avec variation de la densité ou du grand axe. Il resterait aussi à étudier la stabilité et les figures dérivées de celles-ci.

12. **Le problème de Clairaut. Premières limites de l'aplatissement.** — Clairaut suppose la rotation 1° uniforme et 2° assez faible pour qu'on puisse négliger le carré de l'aplatissement. Dans cette hypothèse, il a donné les formules qui résolvent les problèmes de la détermination théorique de l'aplatissement de la Terre.

Le développement des formules du cas général ci-dessus donne la formule fondamentale $e =$ aplatissement (Clairaut),

$$(4) \qquad \frac{3\omega^2}{8\pi f} = \frac{e}{r^3}\int_0^r \rho\, dr^3 - \frac{3}{5}\frac{1}{r^5}\int_0^r \rho\, dr^5\, e - \frac{3}{5}\int_r^1 \rho\, de.$$

En négligeant e^2 la condition (3) est remplie identiquement et ω est indépendant de la position du point. L'équilibre hydrostatique a lieu avec des surfaces ellipsoïdales et une rotation constante. Laplace a démontré que c'était la seule solution dans le cas de l'équilibre hydrostatique ([1]).

En dérivant deux fois cette formule par rapport à r on obtient l'*équation différentielle de Clairaut*

$$(5) \qquad r^2 e'' + 2r e'(3-\zeta) = 2\zeta e, \qquad \zeta = -\frac{r\mathrm{D}'}{\mathrm{D}} = 3\left(1 - \frac{\rho}{\mathrm{D}}\right),$$

où D est la densité moyenne à l'intérieur de la couche de rayon r. La fonction ζ a été introduite par Tisserand.

Radau ramène cette équation au premier ordre au moyen de la fonction η, analogue à la fonction ζ de Tisserand (*équation de Clai-*

([1]) Avec Legendre, il a étudié une théorie plus générale, applicable au cas de la Terre supposée solide, théorie des *sphéroïdes*. Les couches d'égale densité sont simplement supposées voisines d'une sphère, le rayon moyen étant a, le rayon vecteur d'un point est $r = a(1 + \xi y)$ où ξ est une petite quantité dont le carré est négligeable et y une fonction de θ et ψ, exprimée en polynomes sphériques. On obtient une expression analogue à (4) qui différentiée redonne exactement l'équation de Clairaut (5). En appliquant cette théorie à un ellipsoïde de base, et lui rapportant les irrégularités de surface, on peut déterminer l'ellipsoïde qui rend le mieux compte de la variation de la verticale et de la pesanteur à la surface.

raut-Radau)

$$(6) \qquad r\eta' + \eta(\eta + 5) = 2\zeta(\eta + 1), \qquad \eta = \frac{re'}{e}.$$

On obtient entre ces deux fonctions la relation suivante due à Poincaré, Callandreau et Tisserand, η_1 valeur à la surface, φ le rapport de la force centrifuge à la pesanteur

$$(7) \qquad 0 < \eta < \zeta < 3, \qquad \eta_1 = \frac{5}{2}\frac{\varphi}{e} - 2;$$

$\eta > 0$ montre que e est toujours croissant du centre à la surface, et $\eta < 3$ montre que $e : r^3$ est décroissant, d'où les deux *théorèmes de Clairaut* sur la variation des aplatissements internes. Enfin $\eta < \zeta$ montre que eD est décroissant du centre à la surface.

J'ai démontré en outre que, si η est croissant à la surface, il l'est dans toute la masse, que, s'il est décroissant à la surface, il a un maximum à l'intérieur.

Clairaut a déduit de la formule (4) les limites de l'aplatissement à la surface

$$(8) \qquad \frac{1}{2}\varphi < e < \frac{5}{4}\varphi, \qquad \varphi = \frac{1}{288,38}.$$

Il en conclut que l'aplatissement de la Terre doit être compris entre 1 : 230 et 1 : 577. Les mesures des missions géodésiques de Laponie et de l'équateur donnaient 1 : 117 (Clairaut). C'était déjà le second désaccord grave entre les mesures et le calcul. On sait que Cassini, un peu auparavant, avait déduit, des mesures géodésiques, que la Terre était allongée aux pôles, ce qui contredisait la rotation de la Terre.

La première limite, donnée déjà par Newton, se rapporte au cas de l'homogénéité, la seconde, donnée par Huyghens, au cas de la condensation complète au centre, ou d'un noyau solide, composé de couches sphériques, recouvert d'une mince écorce fluide.

Pour la Terre, le rapport $\varphi : e$ est égal à 1,03. Il est plus voisin de $\frac{4}{5}$ que de 2. La Terre ne peut pas avoir une très forte condensation au centre. Pour Jupiter et Saturne, on a 1,456 et 1,434. Ils doivent avoir une condensation prononcée, à peu près du même ordre.

Tisserand a déterminé, par la même formule, une autre limite plus

resserrée, qui dépend de la densité superficielle, $1 : e$ serait compris entre 230 et 403.

La formule (4) devient à la surface (*formule de Clairaut*)

$$(9) \qquad \frac{5}{3}\left(e - \frac{1}{2}\varphi\right) D_1 = \int_0^1 \rho\, dr^5\, e.$$

La loi des densités ρ étant donnée, elle permet de déterminer l'aplatissement superficiel en fonction de φ, c'est-à-dire de l'attraction.

13. Moments d'inertie. Formule de d'Alembert. Nouvelles limites de l'aplatissement. — D'Alembert a déterminé une autre relation entre l'aplatissement et le moment d'inertie A, B,

$$(10) \qquad J\int_0^1 \rho\, dr^5 = \int_0^1 \rho\, dr^5 e, \qquad J = \frac{A - B}{A} = \frac{1}{305,31}.$$

Elle permet de déterminer l'aplatissement e en fonction de la constante de la précession J. Toute loi de densité pour être valable devra donner le même aplatissement au moyen des deux formules (9) et (10). Les valeurs de φ et J sont connues avec une grande précision.

L'élimination de l'intégrale commune entre (9) et (10) donne une nouvelle relation importante, où l'intégration ne porte plus que sur la densité,

$$(11) \qquad \frac{5}{3}\left(e - \frac{1}{2}\varphi\right) = J\int_0^1 \rho\, dr^5.$$

L'étude de la formule (10) permet de déterminer de nouvelles limites de l'aplatissement (Callandreau, Véronnet),

$$(12) \qquad J < e < \frac{1}{2}\varphi + \frac{3}{5}J, \qquad 220,3 < \frac{1}{e} < 305,3;$$

ces limites sont déjà très resserrées, leur rapport est 1,13. La considération des moments d'inertie permet ainsi de déterminer mathématiquement deux limites de l'aplatissement à $\frac{1}{8}$ près.

14. Variation de la pesanteur. Densité centrale. Aplatissement donné par l'action de la Lune. — Clairaut a déterminé également la

variation de la pesanteur à la surface de la Terre, avec la latitude θ,

$$(13) \qquad g = g_0(1 + n \sin^2\theta), \qquad n = \frac{5}{2}\varphi - e;$$

cette formule exprime le *théorème de Clairaut*, sur la différence de pesanteur de l'équateur au pôle. Les mesures de la pesanteur au moyen du pendule donnent g, on en déduit l'aplatissement e.

La variation de la pesanteur en profondeur est donnée par la formule de Saigey

$$(14) \qquad \frac{dg}{dr} = \frac{4}{3}\pi f D\left(3\frac{\rho}{D} - 2\right).$$

Elle augmente au-dessous de la surface tant que la densité ρ est plus petite que les deux tiers de la densité moyenne D. Elle passe par un maximum. Airy a constaté cet accroissement au fond d'un puits de mine, expériences reprises en Saxe en 1886.

On a pu établir des limites inférieures de la densité centrale et de l'aplatissement au centre, $\rho_0 > 7{,}44$, mais pas de limites supérieures.

Laplace, Hansen, Bill ont calculé encore l'aplatissement de la Terre par les perturbations introduites dans le mouvement en longitude et latitude de la Lune, par le renflement équatorial de la Terre. La précision est faible. Laplace trouve 1 : 304 pour l'aplatissement, ce qui est cependant une bonne valeur pour l'époque. Hansen trouve 295 et 298, Helmert 297,8.

15. Le problème de H. Poincaré. Les limites rigoureuses de l'aplatissement. — Les formules de Clairaut et de d'Alembert ont constitué pendant un siècle et demi toutes nos connaissances théoriques sur l'aplatissement de la Terre. H. Poincaré renouvelle la question en déterminant une limite plus précise de cet aplatissement, et indépendante de toute loi de densité (1885). Une seconde limite vint ensuite déterminer rigoureusement l'aplatissement, qui vérifie à la fois les conditions de l'attraction et celles de la précession (Véronnet). La détermination de ces limites mathématiques, en première et seconde approximation, constitue le problème de Poincaré.

L'aplatissement donné par les mesures géodésiques, à l'équateur et en Laponie était en dehors des limites de Clairaut, 1/117. Bessel, le premier, donne une détermination un peu précise, 1/299,153. Sur

des mesures plus nombreuses, mesures géodésiques et de la pesanteur, Faye en France et Clarke en Angleterre, trouvent simultanément des nombres concordants 1/292,3 et 1/293,465, qui rallient l'adhésion des astronomes (1880). Mais Roche montre (1881), qu'en appliquant sa loi des densités, on ne peut pas concilier cet aplatissement à la fois avec la formule de Clairaut et celle de d'Alembert, avec l'attraction et la précession. Tisserand, Lévy, Callandreau essaient de le faire avec des formules plus générales, en poussant même à la seconde approximation, mais toujours en vain.

Radau déduit de l'équation différentielle de Clairaut en η la relation suivante

$$(15)\qquad D_1\sqrt{1+\eta_1}=\int_0^1 \frac{1+\frac{1}{2}\eta-\frac{1}{10}\eta^2}{\sqrt{1+\eta}}\,D\,dr^5=K\int_0^1 D\,dr^5,$$

qui lui permet d'éliminer l'intégrale et par conséquent la densité de l'équation (11). Il obtient

$$(16)\qquad e+\frac{2}{3}J\frac{\sqrt{1+\eta_1}}{K}=J+\frac{1}{2}\varphi.$$

K est la valeur moyenne de l'expression indiquée par (15). Elle varie peu avec les valeurs de η, selon le tableau

$\eta=0$	1/3	$\eta_1=0,58$	3
K 1	1,00075	$K_1=0,9996$	0,8

η_1 et K_1 sont les valeurs à la surface.

Radau considère que η ne varie que de 0 à η_1, et que K reste sensiblement égal à 1. Il en déduit, d'après (16), que la seule valeur de l'aplatissement, qui puisse cadrer avec la formule de l'attraction et de la précession, est 1/297.

Cela supposait que η est toujours croissant, de 0 à η_1, à l'intérieur de la Terre. H. Poincaré montre qu'il faut en conclure seulement $K<1,00075$, valeur maximum, et $e<1/297,1$, valeurs indépendantes de toute loi de densité. Pour concilier ce nombre avec ceux de Faye et de Clarke, il fallait supposer la Terre solide, ou les vitesses internes différentes, ou faire le calcul en seconde approximation (*Figures d'équilibre*, p. 96).

J'ai démontré, par la discussion de l'équation de Clairaut Radau,

que la valeur de η était toujours croissante à l'intérieur de la Terre, que le premier membre de (16) ne peut avoir qu'une solution et l'aplatissement e une seule valeur. On obtient ainsi une seconde valeur de e, également indépendante de toute loi de densité.

Ces deux limites sont données par la formule

$$(17)\qquad \frac{2}{5}\,\mathrm{J}\,\frac{\sqrt{1+\eta_1}}{1{,}00075} < \mathrm{J} + \frac{1}{2}\varphi - e < \frac{2}{5}\,\mathrm{J}\,\frac{1+\eta_1}{1+\frac{1}{2}\eta_1 - \frac{1}{10}\eta_1},$$

qui donne les valeurs extrêmement rapprochées

$$(18)\qquad 297{,}097 < \frac{1}{e} < 297{,}393.$$

Dans l'hypothèse de Clairaut, vitesse uniforme et première approximation en e, l'inverse de l'aplatissement est ainsi déterminé à 0,3 près, indépendamment de toute loi de densité, par les seules valeurs de φ et J. Elles sont connues avec quatre chiffres exacts. La correction de $\frac{1}{e}$ serait donnée par la formule

$$(19)\qquad d\frac{1}{e} = 0{,}787\,d\frac{1}{\mathrm{J}} + 0{,}199\,d\frac{1}{\varphi}.$$

En prenant $1 : \mathrm{J} = 304{,}90$ (Newcomb) au lieu de 305,31 les nombres de (18) seraient à diminuer de 0,323.

Si la loi des densités est donnée par une formule quelconque, développée en fonction des puissances de r, coefficients α, les coefficients β de la loi des aplatissements seront déterminés linéairement, au moyen de (4), par la formule suivante (Véronnet, *thèse*)

$$(20)\qquad \frac{1}{3}\beta_n = \frac{1}{n(n+5)}\sum_1^n p\,\alpha_p\,\beta_{n-p} - \sum_1^n \frac{1}{p+3}\,\alpha_p\,\beta_{n-p},$$

et e est proportionnel à φ pour la même loi des densités (Laplace, Hennessy).

16. Déterminations précises de l'aplatissement théorique. La loi des densités à l'intérieur de la Terre. — Tisserand a démontré que si l'on appliquait la loi de Lipschitz à trois paramètres, loi assez

large, qui donne la loi de Roche pour $n = 2$,

$$(21) \qquad \rho = \rho_0(1 - \alpha r^n), \qquad \rho = \rho_0(1 - \alpha r^2),$$

on obtient la valeur de e sous la forme d'une série hypergéométrique. J'ai pu déterminer, par la notation de M. Hamy, une série beaucoup plus rapidement convergente, ce qui a rendu possibles les calculs numériques, calculer des séries de valeurs de e par les trois formules (9), (10) et (11), et en déduire la valeur de l'inverse de l'aplatissement qui cadre avec ces trois formules. Toutes les valeurs restent comprises entre 297,17 et 297,21, pour des valeurs de n variant de 0,5 à 6,75 et la densité superficielle variant de 0 à 3. Les calculs ont été faits aussi avec toutes les lois étudiées par les astronomes, Laplace et Legendre, Lévy, etc., soit 25 déterminations en tout.

Toutes ces valeurs sont comprises dans les limites

$$1 : e = 297,17 \pm 0,03.$$

Pratiquement, dans l'hypothèse de Clairaut, l'inverse de l'aplatissement est ainsi déterminé à 0,03 pour n'importe quelle loi de densité, en première approximation.

M. Hamy, dans l'hypothèse d'une Terre composée seulement de trois couches, avait trouvé des nombres compris entre 296,53 et 297,78.

Les déterminations plus récentes de l'aplatissement donnent d'ailleurs des nombres conformes aux limites ci-dessus : Helmert, 1 : 297,8 (1885) et (1901), Hayford, 1 : 296,8 (1909). Elles ont fait abandonner les valeurs de Faye et de Clarke.

La loi des densités à l'intérieur de la Terre, en admettant la formule très simple de Roche, s'écrira

$$(22) \qquad \rho = 10,41 - 8,18 r^2, \qquad D = 5,50.$$

Elle donne, avec les formules de Clairaut et de d'Alembert, l'aplatissement 1 : 297,18. L'ancienne formule de l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* avant 1914, avec coefficients 10,0 et 7,5, donnait 291,14 et 298,53.

La pesanteur à l'intérieur aurait un maximum 1,04 à une profondeur 0,16,

$$g = 1,86\, g_1(1 - 0,472\, r^2)\, r.$$

Pour Jupiter et Saturne, la formule de Lipschitz ne permet pas de

réaliser leur aplatissement. G.-H. Darwin avait montré que la formule de Laplace ne le permettait pas. J'ai pu réaliser cet aplatissement par la formule de Lévy, où la courbe des densités présente un point d'inflexion. Ceci indique que ces planètes ont un noyau condensé, surmonté d'une écorce plus légère, avec variation maximum de la densité entre les deux, ce qui n'a pas lieu pour la Terre.

17. Calculs et résultats en seconde approximation. Autres formes. — Il faut tenir compte dans les développements du carré de l'aplatissement ou e^2. Les calculs ont été faits surtout par Airy, G.-H. Darwin, Helmert, Calandreau, A. Véronnet.

La formule de la pesanteur s'écrit alors

$$g - g_0 = g_0\left(\frac{5}{2}\varphi - e - \frac{17}{14}\varphi e\right)\sin^2 l. \tag{23}$$

Le terme en φe est le terme de correction. Il y a un terme en $\sin^4 l$ négligeable. Helmert, en utilisant les valeurs réduites de g, déterminées par le pendule, donne comme formule qui les représente le mieux

$$g = 978{,}046(1 + 0{,}005\,302 \sin^2 l). \tag{24}$$

Avec $1 : \varphi = 288{,}38$ on en déduit $1 : e = 298{,}3$.

En seconde approximation les surfaces de niveau ne peuvent pas être rigoureusement ellipsoïdales. La valeur de la déformation d'un sphéroïde, normalement à la surface, est donnée, sur la couche d'axe polaire a, par la formule générale de Legendre

$$\delta r = a\gamma\lambda^4 \sin^2\theta \cos^2\theta, \tag{25}$$

où γ est une fonction à déterminer.

Il faut calculer le potentiel de la couche de déformation et le transporter dans l'équation des surfaces de niveau établies en seconde approximation. Callandreau démontre que γ est toujours négatif. Les surfaces de niveau sont toutes déprimées entre le pôle et l'équateur. La dépression maximum serait de 10^m à $45°$. Pratiquement avec la loi des densités de Roche, cette dépression serait de $3^m{,}26$ seulement. Elle resterait comprise entre $1^m{,}26$ et $4^m{,}27$ suivant les lois de densité considérées. Sur Jupiter et Saturne elle serait inférieure à 183 et 552^{km}, c'est-à-dire 23 et 12 fois moindre que l'aplatissement, c'est tout à fait insensible.

Pour résoudre le problème, il faut calculer les formules de Clairaut et de d'Alembert (9) et (10), en tenant compte de γ et de e^2. Le terme de correction de la formule différentielle de Clairaut-Radau s'écrit

$$(26) \qquad \chi = \frac{3}{4}\varphi\xi(1+\eta) + \frac{8}{21}e\zeta(5+4\eta+2\eta^2) + \frac{4}{7}e\eta(7+\eta).$$

Il est toujours positif, et toujours croissant, du centre à la surface. On en déduit que les limites et la variation de η sont les mêmes qu'en première approximation, et en toute approximation. En particulier la fonction η est toujours croissante pour la Terre. La seconde limite de l'aplatissement pour $\eta = \eta_1$ est conservée. La première, celle de Poincaré, a lieu pour le même maximum de K (Véronnet).

Les limites extrêmes des valeurs de l'aplatissement, qui satisfont à la fois à l'attraction et à la précession, en seconde approximation, sont

$$(27) \qquad 296{,}732 < \frac{1}{e} < 297{,}504, \qquad \frac{1}{e} = 297{,}12 \pm 0{,}38.$$

De plus $e^3 = 38 \times 10^{-9}$ ne peut influer que sur les millièmes. On a cinq chiffres exacts en toute approximation (Véronnet).

Les calculs numériques, avec les différentes lois de densité et les 25 déterminations corrigées et rectifiées, donnent de même

$$(28) \qquad 297{,}179 < \frac{1}{e} < 297{,}213, \qquad \frac{1}{e} = 297{,}19 \pm 0{,}02.$$

La correction de e, en fonction des valeurs de φ et J, 1 : 288,38 et 1 : 305,31, est toujours donnée par (19). On peut prendre 1 : 297,2 comme aplatissement de référence le plus probable.

Wiechert avait déjà trouvé en seconde approximation 297,3, Callandreau 297,4, G.-H. Darwin avec la formule de Roche 296,4, mais tous trois en prenant une seule et unique valeur de la loi des densités et non des séries de valeurs très larges capables d'englober la valeur réelle.

On peut dire que pratiquement l'inverse de l'aplatissement peut être déterminé, à 0,02 près, par les seules données relatives à l'attraction et à la précession, φ et J, avec la seule hypothèse que la Terre tourne tout d'une pièce.

Les marées de l'écorce prouvent de plus que la surface terrestre possède assez de jeu pour se mettre en équilibre hydrostatique sous

l'action des forces permanentes. Il serait à désirer que les mesures géodésiques et celles de la pesanteur puissent donner ici la précision des mesures astronomiques. Si alors la valeur de l'aplatissement mesuré ne cadrait pas avec les limites calculées, il faudrait abandonner l'hypothèse de la rotation uniforme.

Pratiquement on a pu assimiler également la forme de la Terre à un *tétraèdre*, les quatre pointes étant formées par les trois continents de l'hémisphère nord et par le pôle sud. La différence de niveau entre les sommets les plus élevés et les creux les plus profonds est de 20^{km}, du même ordre que la différence entre les deux demi-axes équatorial et polaire. On a pu l'assimiler également à une *figure en fuseau* d'ordre 3, les trois fuseaux étant formés par les trois masses continentales orientées du Nord au Sud, les deux Amériques, l'Europe et l'Afrique, l'Asie et l'Océanie. On l'a assimilée enfin à une *figure ovoïde* (J.-H. Jeans), disposée comme le tétraèdre ci-dessus. P. Humbert a assimilé la figure de Mars à une figure d'équilibre du quatrième ordre.

18. Hypothèses autres que celle de la rotation uniforme. Précession dans le cas de vitesses de rotation variable. Actions horizontales. — Si la Terre s'était solidifiée avec une autre vitesse de rotation, nous aurions les mêmes formules, en particulier les équations de condition (16) et (17). La variation de e en fonction de φ serait donnée par (19), le terme en J étant nul. En différentiant φ par rapport à ω on obtient

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{2.5}{\varphi} d\frac{1}{e} = -0{,}008\, d\frac{1}{e}. \tag{29}$$

Pour obtenir une diminution d'une unité sur l'inverse de l'aplatissement il faut admettre une vitesse de rotation plus grande de 0,008.

Si l'on admet que la Terre s'est solidifiée progressivement, avec des vitesses variables, il faut modifier l'équation différentielle de Clairaut en différentiant (4) par rapport à ω également. Les équations de condition (16) et (17) sont modifiées. Pour obtenir $1 : e < 297{,}2$ il faut admettre une solidification avec vitesses croissantes du centre à la surface.

De nombreux travaux, de Laplace à H. Poincaré, ont démontré que la précession n'était aucunement modifiée par l'état physique du

globe, solide ou liquide, pourvu qu'il tourne tout d'une pièce. J'ai repris la théorie de la précession pour étudier l'influence de vitesses variables à l'intérieur de la Terre, la formule de d'Alembert (10) devient

$$(30) \qquad J\int_0^1 \rho\, dr^5 = \omega_1 \int_0^1 \frac{\rho}{\omega}\, dr^5 e = \frac{\omega_1}{(\omega)} \int_0^1 \rho\, dr^5 e,$$

(ω) étant la vitesse de rotation moyenne définie par cette formule. La formule de Clairaut n'est pas modifiée. Dans les équations de condition (16) et (17) il suffit de multiplier J par $(\omega) : \omega_1$. On trouve qu'avec une loi des vitesses, analogue à la formule de Roche, on obtient 1 : 292 pour l'aplatissement en admettant une augmentation de la vitesse de rotation de 0,08 de la surface au centre. D'autre part cette loi de variation des vitesses s'expliquerait par un coefficient de viscosité de l'ordre de la poix. Avec un coefficient dix fois plus grand, la variation des vitesses serait plus faible et l'on aurait $1 : e = 296$. Le ralentissement de vitesse de l'écorce s'expliquerait par le freinage dû aux marées. Si l'aplatissement réel est 1 : 297 cette action de freinage est insensible, ou bien la viscosité interne du globe est telle qu'il tourne comme un corps solide.

De même l'étude de la précession, appliquée à un filet fluide, tournant suivant un parallèle, donne (l = latitude),

$$(31) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{3}{2} h \left(1 - \frac{2}{3\cos^2 l}\right) \frac{\cos\theta}{\omega}, \qquad \psi_m = h\frac{e}{\omega}\cos\theta.$$

La valeur moyenne ψ_m redonne bien la précession d'une couche ellipsoïdale. La torsion d'un parallèle situé à l'équateur serait près de 450 fois plus grande que la déviation moyenne de 50″ par an. Elle y produirait une accélération tangentielle, dans le sens du méridien, de 4^{cm} par seconde, égale aux 0,004 de la pesanteur, ce qui peut expliquer les *charriages* des couches géologiques.

Cette accélération est nulle sur le parallèle de 35° et change ensuite de signe. Toutes les 24 heures, il y a compression latérale sur ce parallèle, puis décompression, avec maximum et minimum correspondant à l'intensité des marées. Cela peut être une cause de dislocation et de *tremblements de terre*, sur ce parallèle, qui passe en effet par le Japon, le Haut-Mexique, la Sicile, la Perse.

L'action de la Lune produit donc ainsi, par les marées, des oscillations verticales et horizontales sur les morceaux de la mosaïque ter-

restre découpés par les failles. Ces fragments se mettront lentement ou brusquement (séismes) en équilibre hydrostatique avec la couche sous-jacente, jusqu'à ce que leur poids, ou leur pression, y soit partout le même. On retrouve ainsi les hypothèses analogues de l'isostasie de Pratt, de la compensation de Faye, de la condensation d'Helmert.

Mais l'équilibre hydrostatique de la surface est peut-être une limite non encore atteinte, comme le montrent les bosses du géoïde sous les continents. Alors une détermination plus précise de l'aplatissement *vrai* serait sans doute illusoire. La géodésie doit partir de l'aplatissement *théorique* le plus probable, déterminé par les limites ci-dessus 1 : 297,2, et déterminer les irrégularités du géoïde par rapport à cet *ellipsoïde de base*.

CHAPITRE III.

AUTRES FIGURES D'ÉQUILIBRE. CAS D'UN ASTRE PERTURBATEUR. ÉQUILIBRE D'UNE ATMOSPHÈRE.

On peut rattacher aux mêmes formules l'étude de l'équilibre d'un astre et de son atmosphère, en rotation, sous l'action d'un astre perturbateur plus ou moins éloigné. On obtient ainsi la discussion dynamique de l'hypothèse cosmogonique de Laplace, la figure d'équilibre des comètes et celle de la Lune, travaux dus en grande partie à E. Roche. Il s'y rattache naturellement la théorie de l'anneau de Saturne et du cylindre elliptique.

19. Le problème général de l'équilibre d'une atmosphère. Ses limites. Formules de Roche. — Les recherches théoriques furent commencées par d'Alembert, continuées par Laplace et plus tard par Roche.

On considère un astre m, tournant sur lui-même avec une vitesse de rotation ω, ainsi que son atmosphère. Le potentiel en un point extérieur sera

$$(1) \qquad U_1 = fV - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2\theta = f\frac{m}{r} + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2\theta.$$

La seconde forme suppose que la masse de l'astre peut être considérée comme condensée au centre. Ce sera le cas pour une atmosphère.

Le potentiel d'un astre perturbateur de masse M de distance R, au même point r, θ, pourra s'écrire

$$(1') \qquad U_2 = fM(1-\varphi)(3\sin^2\theta\sin^2\psi - 1)\frac{r^2}{2R^3} - fM\varphi\frac{r}{R^2}\sin\theta\sin\psi.$$

On a introduit une force répulsive, applicable aux comètes, et φ est le rapport de cette force à l'attraction.

Si le premier astre tourne autour du second, ou se déplace par rapport à lui, il faut introduire dans U_2 le potentiel de la force centrifuge. Ce terme est ordinairement négligeable.

Alors les expressions (1) et (1') égalées à une constante donnent les *surfaces équipotentielles instantanées* (Roche), à l'instant t, ou à la distance R.

La pesanteur en un point est donnée par la dérivée partielle de U par rapport à r. Elle s'obtient immédiatement. La *surface limite* est celle sur laquelle la pesanteur est nulle. La *surface libre* de l'atmosphère sera la surface équipotentielle la plus rapprochée, qui sera coupée par la surface limite. Pour toutes les surfaces de niveau intérieures à celle-ci, la pesanteur est dirigée vers l'intérieur. Pour les autres, il y a des régions où elle est dirigée vers l'extérieur. Les molécules s'échappent.

On a déterminé trois limites différentes de l'extension d'une atmosphère. Laplace a énoncé d'une façon précise le théorème de la *limite mécanique d'une atmosphère*, déjà indiqué par Kant, à propos de l'anneau de Saturne. Elle ne peut dépasser la distance où la force centrifuge équilibre l'attraction. La théorie cinétique donne une *limite thermodynamique*, quand la vitesse v des molécules [1], reliées à la température T, leur permet d'échapper à l'attraction de la planète de masse m,

$$(2) \qquad v^2 = \frac{3RT}{\mu} = 2gr = 2f\frac{m}{r}.$$

J'ai déterminé de même la *limite physique*, où s'arrête réellement une atmosphère. Quand le libre parcours des molécules l est égal au double de la distance verticale qu'elles peuvent atteindre par leur force vive, elles retombent de leur propre poids, en conservant

[1] Cette vitesse est étroitement limitée autour d'une valeur moyenne. La formule mathématique de Maxwell, mal interprétée, donnerait à certaines molécules des vitesses infinies.

l'égalité de pression. La pression limite p ne dépend pas de la température

$$(2') \qquad v^2 = \frac{3\,\mathrm{RT}}{\mu} = gl \qquad \text{et} \qquad p = \frac{p_1 l_1}{3\,\mathrm{RT}_1} g\,\mu.$$

On en déduit facilement la hauteur. Pratiquement il faudra tenir compte encore des actions électriques (Végard).

20. L'hypothèse cosmogonique de Laplace. Les surfaces de Roche. — On considère un astre isolé, tournant avec son atmosphère $U_2 = 0$. Les surfaces de niveau de l'atmosphère données par (1) sont de révolution et sont aplaties de plus en plus avec r croissant. La surface libre a la forme d'une lentille biconvexe, où le rapport des axes est $\frac{2}{3}$. La pesanteur est nulle sur l'arête de la lentille dans le plan équatorial. Sur la Terre ce point serait atteint à une distance égale à 6,61 fois son rayon, pour le Soleil à 36 fois son rayon. Les particules de la lumière zodiacale ne peuvent pas faire partie de son atmosphère.

Dans l'hypothèse de Laplace, les particules s'échappent dans le plan équatorial et forment des anneaux à des distances r de plus en plus petites à mesure que ω augmente, $\omega^2 r^3 = f\mathrm{M}$ (Roche).

Fouché montre qu'au moment de la formation de Neptune la masse de l'atmosphère ne pouvait guère dépasser celle des planètes, autrement son moment cinétique aurait dépassé celui du système solaire. Trowbridge avait fait déjà une remarque analogue. Babinet avait fait remarquer, le premier, que le moment cinétique du système pouvait introduire une limite (critérium de Babinet).

Dans l'hypothèse de Laplace, la masse de l'atmosphère peut s'élever toutefois à 1,67 de celle des planètes, en considérant les surfaces de Roche et à 3,17 avec une densité décroissante avec la distance,

$$\rho r^2 = \text{const.}$$

Mais la densité serait seulement 2×10^{-14}, c'est-à-dire 100 milliards de fois plus petite que celle de l'air, dans le cas le plus favorable, celui de l'homogénéité.

La transparence de cette atmosphère, du Soleil à Neptune, serait 130 fois plus grande que celle de l'atmosphère terrestre. Les conditions physiques, la température seraient difficilement acceptables. Or la limite de Poincaré exige, pour la stabilité d'un anneau, à la distance de Neptune (p. 23), une densité plus grande que $3{,}67 \times 10^{-14}$.

et la limite de Crudeli une densité double. L'anneau formé serait instable, ne pourrait pas égaliser ses vitesses, ce qui est nécessaire pour expliquer la rotation directe des planètes.

Un accroissement de la vitesse de rotation du Soleil mettrait 10^{22}, c'est-à-dire 10000 milliards de milliards d'années pour se transmettre à la distance de Neptune. Le temps nécessaire pour l'égalisation des vitesses à l'intérieur des anneaux serait de même ordre, donc énorme (H. Poincaré, p. 29).

21. De la figure des comètes. — La vitesse de rotation ω de l'astre est négligeable. Les surfaces équipotentielles sont données par

$$U = U_1 + U_2 = \text{const.}$$

Si l'on considère des particules qui ne sont pas soumises à la répulsion (molécules gazeuses, Helmholtz), $\varphi = 0$, leurs surfaces de niveau sont allongées et de révolution autour de la droite qui joint les centres. La surface libre est terminée par deux points d'où les molécules s'échappent. Ce n'est pas le cas des comètes. Si l'on introduit une rotation, ces particules décriront deux spirales. On aurait quelque chose d'analogue aux nébuleuses spirales.

Si l'on introduit la force répulsive de la lumière, qui agit sur les particules de l'ordre du millième de micron, les surfaces de niveau sont encore de révolution, mais elles se limitent en avant de la comète pour se prolonger en arrière. On a bien la représentation de la tête et de la queue de la comète. On a pour les distances maximum et minimum de la surface libre, R = distance du Soleil, m et M les masses,

$$(3) \qquad r_1 = R\sqrt{\frac{m}{\varphi M}}, \qquad r_2 = R\sqrt{\frac{m}{\varphi M}}(\sqrt{2} - 1).$$

Cette surface libre se contracte en approchant du Soleil, r_1 et r_2 étant proportionnels à R. Si la surface libre arrivait à pénétrer dans le noyau, la pesanteur y serait négative. Le noyau de la comète se désagrégerait, comme il est arrivé à la comète Biéla. Si l'on suppose le noyau sphérique de densité ρ, rayon R_0, la densité du Soleil étant D, la condition de la stabilité de la comète est

$$(4) \qquad \frac{\rho}{D} \geq 2\frac{R_0^2}{R^3}, \qquad \rho > 2.82 \times 10^{-7}.$$

Le dernier nombre indique la valeur de la densité à la distance de la

Terre. A la surface du Soleil il faudrait à la comète une densité double de celle du Soleil pour n'être pas désagrégée. Schiaparelli déduit de là la désagrégation en essaim d'étoiles filantes d'un amas de particules à faible densité moyenne.

M. Charlier a considéré le cas où l'essaim, toujours supposé homogène et sphérique, décrit une orbite circulaire. Il trouve 3 au lieu de 2 comme coefficient de la formule (4). L. Picart a simplifié la démonstration de M. Charlier et l'a appliquée au cas d'une particule extérieure à l'essaim.

Roche a considéré le problème statique de l'équilibre des molécules de la comète. Bessel a étudié le problème dynamique du mouvement de ces particules sous l'action d'une force répulsive. On peut retrouver par des calculs élémentaires les formules simplifiées de Bessel, l'axe des x étant la ligne des centres des deux astres. On a

$$(5) \qquad x = \frac{1}{2}\varphi\gamma t^2, \qquad y^2 = \frac{8}{9}\frac{px^3}{\varphi r_0^2},$$

γ étant l'attraction du Soleil à la distance r_0 de la comète, p le paramètre de l'orbite de celle-ci, φ le rapport de la répulsion à l'attraction. Pour une forte répulsion l'axe de la queue sera sensiblement rectiligne et dans le prolongement du rayon vecteur. Radau et Hepperger ont publié d'autres formules plus complètes que celles de Bessel.

Brédichin a établi qu'il y avait trois types de queues de comètes répondant à trois valeurs différentes de φ et probablement à trois sortes de particules différentes qui correspondent pour lui à l'hydrogène, au carbone et au fer.

Les particules qui quittent le noyau, avec une certaine vitesse, décrivent des paraboles d'axes parallèles à la répulsion, analogues à celles des projectiles. Leur enveloppe (parabole de sûreté) sera un paraboloïde de révolution qui formera la tête de la comète.

Pratiquement, l'atmosphère et la tête de la comète se forment quand celle-ci s'approche du Soleil, dès que la température, réglée par la distance et la loi du rayonnement de Stefan, a vaporisé une quantité suffisante d'hydrocarbures du noyau. Quand ces vapeurs dépassent la surface libre de Roche, elles se condensent en gros ions, qui sont alors refoulés par la pression de radiation et forment la queue.

La répulsion de la lumière intervient encore pour chasser et équilibrer les particules de la couronne du Soleil. Il suffit que leur diamètre soit de l'ordre du micron pour que la répulsion puisse égaler l'attraction.

Un Soleil plus chaud pourrait équilibrer des particules plus grosses et plus nombreuses, chasser même au loin les particules de sa photosphère, comme cela a lieu pour les étoiles réchauffées brusquement, *étoiles nouvelles*. Le calcul montre qu'une température de 60000° pourrait équilibrer une couche de particules d'une épaisseur équivalente à 50^{cm}, et cela à n'importe quelle distance, car la pression de radiation varie comme la gravitation suivant l'inverse du carré. Mais l'absorption des couches successives réduit la pression de radiation. Il s'établit une nouvelle surface d'équilibre à la distance où elle redevient égale à l'attraction. Ce sera la nouvelle photosphère, la nouvelle surface visible des *étoiles géantes*.

H. Poincaré indique qu'on pourrait expliquer les *nébuleuses spirales* par un ellipsoïde de Jacobi allongé, d'où la matière s'échapperait par les deux extrémités (p. 263). On a vu Chapitre I, que la force centrifuge ne serait ici jamais égale à l'attraction. Il faut y ajouter la répulsion de la lumière dans le cas de la fusion des deux composantes d'une étoile double, ou même la fusion de deux amas d'étoiles.

22. La figure de la Lune. Hypothèse cosmogonique de G.-H. Darwin. — La vitesse de rotation du satellite sur lui-même est égale à sa rotation autour du corps central. Laplace a montré que la figure d'équilibre doit être un ellipsoïde à trois axes, allongé vers la planète. L'allongement serait très faible, 16 et 65^{m} pour la différence des axes.

Roche a fait la discussion complète dans le cas d'une masse homogène. Elle est analogue à celle des ellipsoïdes homogènes (Chap. I). Pour de faibles vitesses de rotation, c'est-à-dire à distance assez grande, il y a deux figures d'équilibre limite, la sphère et une aiguille circulaire allongée. Si la distance diminue, ω augmente, ces deux figures se rapprochent et se confondent dans l'ellipsoïde de bifurcation de Jacobi, où l'on a $h = 0,1871$. C'est le maximum de h, qui détermine celui de la vitesse de rotation, au delà de laquelle il n'y a plus de figure ellipsoïdale possible. Ce maximum serait atteint pour la Lune à une distance de 2,87 rayons terrestres. A la distance

actuelle 60 r, la forme est voisine de la sphère. Wichmann, Schur, Hartwig trouvent une déformation insensible. Par l'étude de photographies prises à différentes phases de la libration, Franz a déterminé un allongement de $0{,}001 \pm 0{,}006$ (*sic*).

Poincaré et K. Schwarzschild ont repris ces résultats. G.-H. Darwin a considéré également la déformation du corps principal sous l'action du satellite, pensant aboutir à une figure piriforme et un dédoublement, mais le résultat fut négatif.

G.-H. Darwin a étudié aussi l'évolution possible de l'orbite de la Lune, et même sa formation par dédoublement de la Terre, dans l'hypothèse où le freinage dû aux marées aurait une action sensible sur la rotation de la Terre. Le moment de rotation du système Terre-Lune serait resté constant. On trouve facilement que les deux astres auraient eu même vitesse de rotation à une distance de 2,5 rayons terrestres, rotation en 5 heures 36 minutes. C'est une distance minimum. Pour que la Lune ait pu se détacher, Darwin admet une résonance des marées produites par le Soleil, qui auraient allongé la Terre dans cette direction. Mais cet allongement de la Terre exige un éloignement plus considérable encore de la Lune, pour conserver le moment cinétique constant. Il ne semble pas possible de faire naître la Lune par fractionnement.

23. Les figures annulaires. Les anneaux de Saturne. — Laplace pose les équations de l'équilibre d'un anneau fluide, la section est elliptique et peut avoir un ou deux aplatissements, comme les ellipsoïdes de Maclaurin. Sa position est instable. Un anneau solide tomberait sur la planète.

Hirn montre que l'action des satellites de Saturne briserait l'anneau, à moins de lui supposer une rigidité supérieure à celle de tous les corps connus.

Maxwell fixe une limite supérieure de la densité moyenne de l'anneau, qu'il soit liquide ou composé de particules séparées, on a

$$4\pi\rho < \frac{\omega^2}{14}. \tag{6}$$

Il en conclut que la densité doit être plus petite que le 1 : 300 de celle de la planète et qu'il ne peut pas être liquide.

Il considère alors un anneau composé de p particules disposées

sur un cercle. Il établit les équations du mouvement de ces particules, soit $2p$ équations différentielles linéaires et homogènes, en fonction des écarts de r et θ avec le mouvement circulaire normal, puis il détermine une solution particulière périodique, qui permette de limiter ces écarts. La condition à remplir pour que ces écarts restent petits est

$$(7) \qquad \mu p^3 < 2{,}3 \qquad \text{ou} \qquad mp^2 < 2{,}3,$$

où μ est la masse de l'une des particules et m celle de l'anneau, la masse de Saturne étant 1. Henri Poincaré fait remarquer que sous cette forme p ne peut pas devenir très grand, autrement la masse tend vers zéro, et propose de considérer un anneau de section finie (*Hypothèses cosmogoniques*, p. 41). Mais si l'on suppose les particules sphériques, de même densité que la planète, les rayons étant r et R, si d est la distance des particules sur l'anneau de rayon D, la condition devient

$$(8) \qquad (2\pi)^3 \frac{r^3}{R^3} \frac{D^3}{d^3} < 2{,}3 \qquad \text{ou} \qquad \frac{d}{2r} > 2{,}38 \frac{D}{R}.$$

Le rayon de l'anneau intérieur de Saturne est égal à 1,48 fois celui de la planète. Il suffit pour la stabilité que la distance moyenne des particules dépase 3,52 fois leur diamètre; pour l'annèau extérieur il faut 5,35, car D = 2,25 R. Avec la même condition (8) les anneaux de Laplace auraient été stables et n'auraient jamais formé de planète (A. Véronnet).

L'étude de la forme extérieure des anneaux a été reprise, avec une méthode plus rigoureuse que celle de Laplace, par Mme Kowalewski. Elle développe en série le potentiel de l'anneau, celui de la planète, celui de la force centrifuge, et détermine les conditions des surfaces équipotentielles avec ou sans corps central.

Poincaré s'est occupé de la question à la suite des travaux de Mme Kowalewski. Il étudie aussi le problème de deux anneaux indépendants l'un de l'autre. C'est cette étude qui l'a amené à celle des ellipsoïdes homogènes et des figures dérivées.

Levi-Civita a étudié les formes les plus générales de lignes matérielles et Tisserand le cas de l'anneau creux.

Kant a expliqué la formation de l'anneau de Saturne par l'accroissement de la rotation de la planète, dû à la contraction. C'est la

théorie classique. Mais dans une masse tournant tout d'une pièce, la force centrifuge n'arrive pas à égaler l'attraction. Il faut admettre que les parties qui ont formé l'anneau tournaient déjà plus vite que la planète, et provenaient d'une sorte de satellite incorporé à l'atmosphère, ou à la surface équatoriale. On constate, sans doute pour la même raison, que sur le Soleil et sur Jupiter la zone équatoriale tourne plus vite que le reste.

CHAPITRE IV.

ÉQUILIBRE DYNAMIQUE DE L'UNIVERS ET DES SYSTÈMES STELLAIRES. LES COSMOGONIES.

La Mécanique céleste a résolu le problème des mouvements et des actions mutuelles du système solaire, planètes et comètes. Le même problème se pose pour l'ensemble de l'Univers. On a étudié le cas de l'équilibre et de l'évolution de systèmes finis et isolés, et aussi le cas général de l'ensemble de l'Univers. Les auteurs de cosmogonie n'ont étudié en général que le problème restreint d'un système isolé. Dans ces différents cas les auteurs se sont placés de même à deux points de vue distincts. Ils ont étudié ou l'état final (équilibre permanent), ou bien l'état initial des vitesses. Enfin se posent les problèmes de la condensation des masses en étoiles et de l'origine des mouvements de rotation des planètes.

24. **Univers fini ou infini. La loi de gravitation reste applicable.** — Une masse sphérique, homogène, finie, formée de particules immobiles se concentrerait en bloc au bout du temps

$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r^3}{2fm}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3\pi}{2f\rho}}, \tag{1}$$

où r est le rayon, m la masse et ρ la densité. Le temps ne dépendrait que de la densité, de la densité moyenne dans une masse hétérogène. Un Univers limité, quel que soit son rayon, ayant la densité moyenne des étoiles, ou une nébuleuse de même densité, se serait condensé en 10 millions d'années environ. C'est trop peu.

Si les masses sont en mouvement la force vive peut contre-balancer l'attraction, mais, pour un rayon égal à quelques millions d'années de

lumière, il faudrait des vitesses de l'ordre même de celle de la lumière, ce qui est admis comme physiquement impossible. Il faudrait de plus expliquer ces vitesses.

Mais si l'Univers est infini, Wundt et Seeliger remarquent que l'attraction serait infinie en chaque point, Borel que la résultante du moins pourrait être complètement indéterminée. Le problème dynamique de l'équilibre serait également indéterminé.

Cependant si l'attraction peut être indéterminée mathématiquement ou théoriquement, elle est toujours bien déterminée pratiquement et réellement en chaque point. De plus nous ne connaissons que des mouvements relatifs, qui seuls ont un sens pour nous. Ils ne dépendent que des variations du potentiel et de l'attraction autour du centre de référence, c'est-à-dire uniquement de la répartition des masses environnantes. Tous les mouvements dans une région, aussi étendue qu'on voudra, seront donc fonction de la connaissance des masses de cette région et des autres régions qui l'entourent.

D'ailleurs la théorie de la relativité attribue une courbure à l'espace et une limite à notre Univers, si la densité moyenne dépasse une certaine limite, qui paraît atteinte, d'après Lémeray, Eddington, etc. Nous ne pourrions pas voir les étoiles, ni sentir leur action, au delà de cette limite. L'Univers peut être infini, mais relativement à nous il reste fini. Les limites de notre Univers d'ailleurs seraient relatives à l'observateur et voyageraient avec lui.

Charlier, Mac Millan, Borel ont d'ailleurs montré que l'on pouvait imaginer une constitution de l'Univers telle que la densité moyenne et l'attraction résultante de l'ensemble y seraient nulles.

J'ai montré de plus que l'objection suppose que l'attraction se propage avec une vitesse infinie, ou depuis un temps infini. Elle se propage probablement avec la vitesse de la lumière et l'attraction des étoiles n'a atteint qu'une distance finie depuis leur formation. De plus comme l'intensité de la gravitation diminue indéfiniment avec la distance il arrive un moment où elle est nulle physiquement, où elle n'exerce plus d'action réelle.

Limite de relativité, limite de propagation, limite d'action physique, ces trois limites déterminent, dans l'Univers indéfini, les bornes de notre Univers. L'attraction en chaque point reste parfaitement déterminée et finie. Le problème de l'équilibre mécanique est lui-même parfaitement déterminé.

25. **Le problème cosmogonique restreint. Équilibre et évolution d'un système isolé. Les théories cosmogoniques.** — Laplace, dans son hypothèse, considère un Soleil déjà fortement condensé, entouré d'une atmosphère très étendue. En remontant plus haut on trouverait un Soleil plus dilaté, se diffusant dans son atmosphère, pour ne plus former qu'une vaste nébuleuse. (En fait la conservation des moments exige une forte condensation, *voir* n° 20.) Toutes les autres étoiles auraient formé primitivement autant de nébuleuses. Auparavant il n'y avait plus que la nébuleuse primitive indéfinie.

Tous les auteurs de cosmogonie après Laplace ont admis que la nébuleuse primitive s'était d'abord fractionnée en nébuleuses isolées, dont chacune avait évolué indépendante, pour former finalement autant d'étoiles et de systèmes solaires. Ils étudient l'évolution d'un système isolé, déjà individualisé, en particulier avec son moment de rotation. C'est le problème cosmogonique restreint. La solution générale s'obtient en étendant à l'ensemble cette solution très particulière. Il n'est pas certain que cette méthode soit rigoureuse.

Faye considère que le Soleil provient d'une nébuleuse sensiblement sphérique et homogène à rotation lente. Il a précisé l'état physique du milieu en montrant que la masse du Soleil, répartie dans sa sphère d'action, donnait une densité tellement faible que la matière n'était plus un gaz, mais un ensemble de molécules presque isolées, à la température du zéro absolu. Le mot de température même a-t-il un sens pour cet état de diffusion extrême ? A l'intérieur de la nébuleuse la pesanteur croît proportionnellement à la distance au centre. Les particules donneront des anneaux qui tourneront en bloc et les planètes qui en proviendront tourneront dans le sens direct. Il n'y a pas besoin d'hypothèse supplémentaire pour expliquer ce fait. C'est un avantage sur l'hypothèse de Laplace. Mais la difficulté tirée de la grandeur du moment cinétique est encore plus grave ici.

Les particules non équilibrées par la force centrifuge se condensent vers le centre. La formule de la force se modifie. On a

$$F = \frac{a}{r^2} + br. \tag{2}$$

Au début $a = 0$ on a des ellipses concentriques, puis a augmente et b diminue. Finalement b devient nul, on a des ellipses képlériennes. Quand a est devenu prépondérant on a eu des planètes à rotation

rétrograde, comme Neptune et Uranus. Dans la concentration la masse attractive augmente, les grands axes diminuent. Faye démontre que les orbites circulaires le restent.

Les trajectoires déterminées par la loi de Faye ne sont pas des ellipses. M. Maillard a étudié une loi, qui donne des ellipses, où le centre d'attraction se trouve entre le centre de l'ellipse et son foyer, et se rapproche de l'un ou de l'autre suivant la valeur des paramètres α et β,

$$F = \frac{-\mu m r}{(\alpha^2 + \beta\sqrt{r^2 - \alpha^2})^3}. \tag{3}$$

Cette formule rentre naturellement dans celles d'Halphen et de Darboux.

Le colonel du Ligondès admet également au début une nébuleuse sensiblement homogène et légèrement ellipsoïdale. En outre les mouvements des molécules s'y font en tout sens, comme dans un gaz, de façon à équilibrer l'attraction. Il y a seulement une légère prédominance des mouvements autour d'un axe, de façon à réaliser le moment cinétique du système solaire. Les chocs non élastiques diminuent les vitesses et provoquent la concentration. L'aplatissement commencé s'accentue. Le reste comme dans Faye.

H. Poincaré démontre, à propos de cette hypothèse, que, dans une masse gazeuse entièrement libre, la distribution des vitesses satisfait encore à la loi de Maxwell, c'est-à-dire répartition au hasard et équipartition de l'énergie, pour les molécules de masses différentes (*Hypothèses cosmogoniques*, p. 110). La démonstration vaut pour les étoiles d'un amas.

M. Belot et M. l'abbé Moreux ont déduit tous deux l'origine du système planétaire d'un Soleil primitif, animé d'un mouvement de rotation et pénétrant dans une nébuleuse. On obtient un épanouissement en spires, dont les éléments formeront les planètes. En plus grand on aurait une nébuleuse spirale.

M. Belot trouve dans le système solaire des relations empiriques intéressantes entre les différents éléments des planètes et de leurs orbites. Il les explique dans son hypothèse. Mais il est bien difficile de croire qu'elles datent de l'origine du système. Une très faible résistance de milieu par exemple aurait pu modifier considérablement les distances et surtout leurs rapports. Ces auteurs n'essaient pas non

plus d'expliquer l'origine du moment cinétique de rotation, qui est un invariant du système depuis qu'il est isolé, et un élément mécanique essentiel, plus que tous les autres détails.

Chamberlin et Moulton ont repris la théorie des marées de Darwin en faisant intervenir l'action d'un corps troublant passant dans le système solaire. J. See a développé la théorie de la capture, grâce à la résistance d'un milieu résistant, théorie qui peut s'appliquer aux satellites, ou du moins aux plus éloignés (H. Poincaré).

26. **Hypothèse de l'état final ou de l'équilibre permanent.** — Quelles que soient les vitesses primitives des astres, ou celles que leur a donné la gravitation, au bout d'un temps très long il y aura brassage intime des éléments, et l'état d'équilibre tendra finalement vers celui d'une masse gazeuse (lord Kelvin, H. Poincaré, etc.). Cette conception a été appliquée à l'ensemble de l'Univers, à la Voie Lactée, aux amas d'étoiles.

L'Univers connu est constitué par la Voie Lactée, formée uniquement d'étoiles; par les amas globulaires, condensés sur ses flancs; et par les nébuleuses spirales, qui sont complètement en dehors d'elle. Les mouvements des amas se font nettement vers la Voie Lactée, ceux des nébuleuses spirales en sens contraire. Il n'y a rien qui ressemble à une répartition au hasard des vitesses ou des formes.

Poincaré applique l'hypothèse à la Voie Lactée. En supposant un ensemble sphérique et homogène l'attraction est proportionnelle à la distance au centre. Les trajectoires sont toutes des ellipses décrites dans le même temps. Cette période commune est inverse de la racine carrée de la densité. Pour une Voie Lactée, composée d'un milliard d'étoiles, elle serait de l'ordre de 100 millions d'années. Le parcours moyen de chaque étoile, sans collision, serait d'ailleurs beaucoup plus grand que le diamètre de la Voie Lactée. La stabilité serait très grande. Une étoile ne passerait au voisinage d'une autre, à une distance minimum égale à celle de Neptune au Soleil, que tous les 5000 ans environ, d'après J.-H. Jeans. Les collisions ne pourraient pas expliquer la fréquence des étoiles nouvelles. Si l'ensemble est ellipsoïdal, on aurait sensiblement les mêmes résultats. Il suffirait d'admettre une très lente rotation, un tour en 500 millions d'années pour expliquer son aplatissement.

La loi de l'équipartition de l'énergie, ou du moins la variation des

vitesses en sens inverse des masses, paraît se vérifier pour les étoiles voisines de nous. La répartition des vitesses au hasard ne l'est certainement pas. Kobold montre déjà en 1897 que les mouvements propres stellaires sont caractérisés par une prédilection pour certaines directions toutes parallèles au plan de la Voie Lactée. Ceci a été généralisé et mis hors de doute par Kapteyn, pour l'ensemble des étoiles, par d'autres, pour tous les amas d'étoiles dont les mouvements propres sont sensibles. Kapteyn en a déduit, comme interprétation physique, l'existence de deux courants d'étoiles, mélangés et de directions opposées. Schwarzschild en a conclu plus simplement que la loi de répartition des vitesses, en chaque point de l'espace, devait être

$$(4) \qquad V = V_1 e^{-h(u^2+v^2+w^2)-ku^2},$$

où $k \neq 0$ indique une prédominance dans une direction, $k = 0$ donne la loi de Maxwell, formule de Gauss. Cette seconde hypothèse (répartition ellipsoïdale des vitesses) semble rendre mieux compte des observations.

Pour un amas isolé, H. Poincaré montre que l'on a l'équation du viriel V de Clausius, dans le cas de l'équilibre permanent,

$$(5) \qquad 2T + V = 0 \quad \text{ou} \quad 2T - W = 0,$$

car $V = -W$ (énergie potentielle) dans le cas de la gravitation (T = énergie cinétique). La conservation de l'énergie donne en outre

$$(6) \qquad T - W = T_0 - T_p - W_0 = C,$$

où T_0 et W_0 sont l'énergie cinétique et potentielle initiales, T_p l'énergie cinétique perdue par les chocs, ou le frottement du milieu.

Si l'amas est sphérique et homogène on a de plus

$$(7) \qquad W = \frac{3}{5} f \frac{M^2}{R} \quad \text{et} \quad W = f \frac{M^2}{R},$$

dans le cas d'une concentration maximum, densité en raison inverse du carré de la distance (*Hyp. cosm.*, p. 201).

L'équation (5') montre que, dans l'équilibre permanent, l'énergie cinétique est égale à la moitié de l'énergie totale produite par la concentration au rayon R. Cette condition se trouve réalisée si toutes les trajectoires sont circulaires, quelle que soit la loi des densités. Si la

répartition des vitesses est quelconque, on ne sait pas quelle est la loi des densités, et s'il y en a une qui permet de la réaliser. Eddington a étudié quelle devait être la répartition des vitesses pour que la densité soit uniforme.

Un amas, où toutes les étoiles seraient primitivement au repos, prendrait, dans l'équilibre permanent, un rayon moitié moindre, s'il n'y a pas de perte de force vive dans la concentration. Si l'on a pour l'énergie cinétique totale $2\,T > W$, l'amas se dilate. Il se contracte dans le cas contraire.

Zeipel calcule que, d'après la densité des étoiles dans les amas, les vitesses intérieures atteindraient 100 km : sec. Or on n'a observé aucun déplacement par rapport au centre dans les amas. Ceux-ci, comme la Voie Lactée, semblent donc bien loin de leur concentration finale, correspondant à l'équilibre permanent.

27. **Hypothèse de l'état initial.** — Nous sommes certainement très loin de l'état initial des astres, ou de leur formation, la condensation des étoiles étant achevée, mais nous pouvons être très près de l'état initial des positions des astres, dont la condensation en amas, ou en systèmes, est loin de l'état final et paraît même à peine ébauchée. Au point de vue calorifique à l'intérieur, la Terre par exemple est très voisine de l'état initial (*voir* n° 31).

Les distances des étoiles sont en effet très grandes et leurs actions tendent à s'équilibrer. De plus si l'on remonte à l'état primitif de la nébuleuse, sa condensation en étoiles et en amas s'explique par les écarts locaux de la densité au-dessus de la moyenne. D'après le calcul des probabilités, l'excès moyen de densité d'un amas de n étoiles sera $\sqrt{n}$ fois plus petit que celui qui a donné naissance à une étoile. Le temps exigé pour la condensation d'un amas sera donc plus long que pour une étoile, plus lente encore sera la condensation d'une Voie Lactée.

L'hypothèse de l'état initial suppose un milieu quelconque, non parfaitement homogène, composé d'étoiles au repos. Dans une région étendue autour d'un point, le champ d'attraction, non nul, est sensiblement uniforme en première approximation. Toutes les étoiles y prennent des vitesses égales et parallèles. On a bien de véritables courants d'étoiles.

S'il y a une condensation d'ensemble, formant un ellipsoïde aplati

comme la Voie Lactée, ces courants seront bien dirigés parallèlement au plan général. S'il se trouve dans une région un accroissement de densité, les étoiles environnantes éprouveront un mouvement de concentration, qui sera l'amorce d'un amas stellaire. L'observation montre que ces vitesses de concentration sont très faibles, même douteuses. L'amorçage est à peine commencé.

Roche et Schiaparelli ont montré qu'un amas de particules, soumis à l'action d'un centre d'attraction éloigné, s'allonge dans cette direction. Dans un milieu homogène au contraire, où l'attraction croît avec la distance, le calcul montre qu'un amas doit s'aplatir suivant cette direction. L'observation montre que tous les amas de la Voie Lactée sont aplatis normalement à son plan. L'action d'ensemble est nette, mais seulement ébauchée.

Cette action donne également ainsi aux étoiles un mouvement préférentiel parallèle au plan de la Voie Lactée, et conforme à l'hypothèse ellipsoïdale de Schwarzschild, rendant inutiles les deux courants de Kapteyn, qui supposaient une compénétration commencée des étoiles. L'hypothèse de l'état initial pour les positions et les vitesses des étoiles paraît beaucoup plus près de la réalité que l'hypothèse de l'état final.

28. **Le problème cosmogonique général. Passage de l'homogène à l'hétérogène.** — Le problème cosmogonique suppose les atomes formés, pour en former les étoiles, comme la géologie suppose la Terre toute formée, pour étudier la formation des couches sédimentaires à sa surface. Avant la combinaison des particules électriques qui forment les atomes, la matière n'existait pas, ni la gravitation.

Ces atomes pouvaient être en repos ou en mouvement. S'ils étaient en mouvement leurs vitesses étaient abandonnées au hasard. On ne peut pas leur donner des mouvements d'ensemble arbitraires, qui isoleraient des lambeaux en nébuleuses élémentaires, à évolution indépendante, comme on l'a fait dans le problème cosmogonique restreint et dans les cosmogonies particulières.

Ces vitesses ont pu faire obstacle à la condensation d'après les formules (5) et (6), mais elles s'amortissent progressivement par les chocs (Poincaré, p. 35). De plus, les électrons libres condensent les molécules en gros ions et en particules météoriques, comme ils condensent la vapeur d'eau en brouillard, dans un air saturé. Le calcul

des probabilités montre que la vitesse moyenne d'une particule ainsi formée sera égale à celle d'une molécule, divisée par $2\sqrt{n}$. Elle devient sensiblement nulle pour les fines poussières météoriques. La condensation des étoiles n'a peut-être commencé qu'après la formation de ces poussières.

On ne peut faire aucune hypothèse sur le milieu primitif, sauf qu'il n'était pas mathématiquement homogène. Alors toute région de maximum de densité y constitue un centre d'attraction. Le calcul montre comment ces centres vont condenser toute la matière située dans leur sphère d'attraction, limitée chacune par les centres voisins. Au lieu de se fractionner en nébuleuses distinctes, le milieu nébulaire s'est condensé directement en étoiles, puis celles-ci en amas (A. Véronnet).

Dans un milieu de densité ρ, si l'on suppose une masse additionnelle m, l'attraction exercée sur une molécule, située primitivement à une distance r et venue en x sera accrue de toute la masse comprise entre x et r et sera

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -f\frac{m}{x^2} - \frac{4}{3}\pi f\rho\frac{r^3 - x^3}{x^2}. \tag{9}$$

Le temps mis par la masse M, contenue dans la sphère de rayon r, pour se concentrer sur m, est donné par la formule

$$\frac{M}{m} + \frac{1}{3} = \frac{1}{10}e^{\alpha t+1}, \qquad \alpha^2 = 4\pi f\rho, \tag{10}$$

exacte à 0,0001 près dès que M dépasse 10 fois m. Cette formule s'applique à la condensation des amas, comme à celle des étoiles. La vitesse moyenne des amas serait 10 à 20 fois celle des étoiles, comme on le vérifie. Le temps est inversement proportionnel à la racine carrée de la densité ρ du milieu.

L'amorçage peut être très long. Avec la densité probable, indiquée par celle des étoiles, une molécule d'hydrogène en plus aurait mis environ 400 millions d'années pour concentrer une masse égale à celle de la Terre. Après amorçage, la condensation des 999 millièmes du reste de la masse ne dépend plus de l'excès de masse primitif. Il suffit alors de 20 millions d'années pour obtenir une masse égale à celle du Soleil. La vitesse de chute finale est sensiblement la même que si l'ensemble avait été isolé du milieu dès le début.

29. Formation des systèmes planétaires et des systèmes stellaires. A. Véronnet. Résistance du milieu. — Kant, encore étudiant lithuanien à Kœnigsberg, a abordé le problème cosmogonique général, mais sans la vérification d'aucun calcul. Il n'a pas tenu compte des vitesses des molécules pouvant s'opposer à la condensation, de plus le moment cinétique de chaque système doit être nul, comme le remarque M. Poincaré, page 2.

Pour résoudre ce problème il fallait déterminer les actions qui peuvent donner, à des portions de systèmes, des moments cinétiques non nuls et suffisants, puis régulariser les trajectoires obtenues pour les rendre circulaires.

Dans le problème cosmogonique des trois corps, les trois corps partant du repos, l'un d'eux va tourner dans un sens autour du centre de gravité commun et les deux autres dans l'autre sens. Il y a une configuration initiale, qui donne des moments cinétiques maximum.

Dans un milieu stellaire en formation l'action des centres voisins produit également des déviations, qui se traduisent finalement par des moments cinétiques. J'ai montré que dans notre milieu les particules assez rapprochées tombant sur le Soleil avaient pu acquérir un moment de rotation suffisant pour les faire passer à une distance périhélie égale à 16. Le rayon de giration du système planétaire étant 6,55 on dispose d'un moment plus que suffisant, pour expliquer cet invariant du système. Il doit y avoir d'autres systèmes planétaires et cométaires, correspondant aux différentes étoiles perturbatrices, dont la somme des moments de rotation est nulle. Leur masse totale serait même beaucoup plus grande que celle du Soleil. S'il y a un centre secondaire de condensation on aura une étoile double.

Le calcul montre que, pour un ensemble de particules passant au périhélie, le moment de rotation total est plus grand que le moment de la quantité de mouvement du centre de gravité. Le mouvement de rotation des particules, condensées en planètes, doit donc être direct en général, sans qu'il soit besoin d'hypothèse spéciale.

Les particules tomberaient d'abord suivant une trajectoire très allongée. La résistance du milieu a pour effet de rendre ces trajectoires circulaires comme l'a montré See. J'ai montré que dans le cas où cette résistance est due à la rencontre de particules immobiles, avec une densité inverse du carré de la distance, ce qui est le cas

autour d'un astre en condensation, on peut résoudre complètement le problème. La formule suivante donne la relation entre le paramètre de la conique, le grand axe, l'excentricité et la masse de l'astre, les indices 1 représentent les valeurs initiales, α est un paramètre indéterminé mais compris entre d'étroites limites $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$,

$$\frac{p}{p_1} = \frac{a(1-e^2)}{p_1} = \frac{m_1^2}{m^2} = \left(\frac{e}{e_1}\right)^{\alpha}. \tag{11}$$

Quand l'excentricité sera devenue 0,1 la masse sera de 2,16 à 2,37 fois la valeur primitive et le grand axe les 0,22 à 0,26 du paramètre primitif. Il suffira que ce paramètre ait été compris entre 14 et 17 pour donner finalement un grand axe de 6,5 égal au rayon de giration moyen des planètes. Ces formules permettent de déterminer également le temps et le nombre de révolutions. Les distances des planètes n'ont pas pu varier beaucoup sans qu'elles se soient rencontrées.

Les planètes proviendraient ainsi d'un lambeau de la nébuleuse entourant le Soleil primitif, lambeau qui aurait été dévié de la chute directe par l'action perturbatrice des étoiles voisines et dont la trajectoire serait devenue circulaire par l'action de résistance du milieu (A. Véronnet).

L'évolution ultérieure montre qu'une planète peut tomber finalement sur l'astre central, d'où l'origine probable des étoiles nouvelles, qui deviennent ensuite étoiles nébuleuses. La pression de radiation, qui résulte de la conflagration, peut chasser au loin la photosphère et donner une étoile géante. La fusion avec rotation de deux amas d'étoiles donnera une nébuleuse spirale.

CHAPITRE V.

ÉQUILIBRE THERMODYNAMIQUE DE L'UNIVERS. ÉVOLUTION.

Le travail de la gravitation produit de la chaleur. Cette chaleur intervient à l'intérieur des étoiles pour déterminer les conditions de leur équilibre physique. Elle intervient à l'extérieur pour déterminer leur rayonnement. Ce rayonnement, ces conditions physiques sont déterminés par des lois mathématiques, aussi simples que celle de la

gravitation. Aussi les noms des plus grands mathématiciens sont-ils attachés à cette étude de l'équilibre thermodynamique des astres.

30. **Équilibre calorifique du Soleil et son entretien. Helmholtz.** — Son rayonnement a lentement diminué depuis les périodes géologiques. Une élévation de température de $\frac{1}{3}$ suffit pour expliquer la végétation tropicale dans nos contrées. Aucune réaction chimique, ni la radioactivité, ne donneraient un rayonnement aussi long. Les sources tirées de la relativité, comme la transformation de la masse en énergie (J. Perrin), sont tout à fait hypothétiques et ne cadrent pas avec les observations. L'énergie rayonnée par une étoile par exemple devrait être proportionnelle à sa masse.

Robert Mayer explique la chaleur du Soleil par la chute de particules météoriques. W. Thomson s'y rallie, puis l'abandonne. Le calcul montre que l'accroissement de masse du Soleil accroîtrait le moyen mouvement des planètes de quantités incompatibles avec les observations.

Helmholtz montre que le simple travail de contraction du Soleil peut dégager une chaleur suffisante. Les formules (7) du Chapitre précédent donnent l'énergie potentielle, ou le travail total dû à la contraction. La différentiation de ces formules par rapport à W et R montre qu'il suffit d'une contraction de 40^{m} par an, c'est-à-dire tout à fait insensible, pour expliquer le rayonnement actuel.

Ces formules (7) (la seconde donne un maximum, H. Poincaré, p. 202) montrent encore que l'énergie totale est comprise entre 14 et 24 millions d'années de chaleur, au taux actuel. La formation du Soleil en étoile rayonnante ne remonterait pas plus haut. De plus, le Soleil était autrefois plus gros et plus chaud. Le calcul en seconde approximation réduit ces nombres à 1 ou 2 millions d'années.

Les géologues demandent 100 millions d'années pour expliquer la salure des mers, d'après H. Joly, et près d'un milliard pour la formation des couches sédimentaires, toujours au taux actuel. Si l'on tient compte d'une loi de Van't Hoff, une température plus élevée donnait des quantités d'eau plus grandes (double pour une élévation de 10°), des actions physiques et chimiques plus rapides, et le calcul de seconde approximation réduit également ces nombres à quelques millions d'années. Il est évident d'ailleurs que ce n'est pas une question de temps, mais de travail ou d'énergie. La même énergie, cor-

respondant à 20 millions d'années de chaleur, produira beaucoup plus de travail, si elle est condensée en un million d'années, que si elle est dispersée en un milliard.

31. Équilibre calorifique de la Terre et son refroidissement. Lord Kelvin. — Le refroidissement de la surface de la Terre est le même que celui du mur indéfini, en supposant avec lord Kelvin la température initiale uniforme, et en négligeant la courbure de la Terre. La température au temps t à la profondeur x est donnée par la formule aux dérivées partielles de Fourier:

$$(1) \qquad \frac{dT}{dt} = k\frac{d^2T}{dx^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{dT}{dx} = \frac{T_0}{\sqrt{\pi k t}}\, e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

donne le degré géothermique, T_0 étant la température initiale ou centrale. Le coefficient k dépend de la conductibilité de la surface et de sa chaleur spécifique.

En faisant $x = 0$ dans la seconde formule, on obtient le temps t écoulé depuis l'origine du refroidissement, en fonction de T_0, de k et du degré géothermique, k peut varier de 0,14 à 0,004 et le temps de 200000 ans à 800 millions, avec moyenne probable de 9 millions. En tout cas le refroidissement n'aurait pas pénétré sensiblement à plus de 40^{km}. L'état calorifique de la Terre serait, dans l'ensemble, très voisin de l'état initial.

Si l'on admet qu'il est voisin de l'état final, il faut tenir compte de la courbure des couches, dans l'équation de Fourier. La température différerait peu de l'accroissement linéaire avec la profondeur et atteindrait 170000° au centre. L'origine remonterait alors à quelques centaines de milliards d'années (Poincaré, p. 214 et 216). Il est certain que la température intérieure de la Terre ne peut pas atteindre ces chiffres et que son état interne actuel est beaucoup plus voisin de l'état initial que de l'état final. Le gradient de température à la surface devrait être 73 fois plus petit qu'actuellement pour un état voisin de l'état final et une température de 2000°.

32. Équilibre adiabatique d'une étoile. Cas d'un gaz parfait. Lane et Lord Kelvin. — La formule des gaz parfaits

$$(2) \qquad \mu p = R\rho T \qquad \text{et} \qquad dp = -g\rho\, dr,$$

celle de l'équilibre hydrostatique, établissent deux relations entre la

pression, la température et la densité ρ (poids moléculaire μ). Il faut une troisième relation, qui sera nécessairement hypothétique. H. Lane a introduit l'hypothèse de l'équilibre adiabatique, qui serait produit par les courants de convection, et il a adopté la formule correspondante, qui contient le rapport des deux capacités calorifiques, ε.

On a

$$(3) \qquad p = k\rho^{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \frac{dT}{dr} = -\frac{g\mu}{R}\,\frac{C-c}{C}.$$

Cette dernière formule donne la variation de température avec la profondeur, qui varie seulement avec g. Lane aboutit à une intégrale qu'il développe en série. W. Thomson s'occupe à son tour du problème et ramène sa solution à celle d'une équation différentielle, qui permet déjà des résultats généraux intéressants. J.-J. See, Emden reprennent la question et complètent les calculs numériques.

Ces calculs exigent pour l'équilibre du Soleil des températures centrales de 10 à 20 millions de degrés, qui paraissent ne plus avoir de sens physique. De plus, l'équilibre adiabatique aboutirait à zéro degré à la surface et l'on n'a pas essayé de définir les conditions d'équilibre des couches superficielles, qui nous intéressent le plus.

33. **Équilibre radiatif d'une étoile. Schwarzschild, Eddington.** — Eddington introduit l'hypothèse que le rayonnement extérieur d'une étoile est entretenu complètement par le rayonnement de proche en proche des couches intérieures, sans aucun courant de convection. Il applique à l'intérieur d'une étoile les formules calculées par Schwarzschild pour l'équilibre radiatif d'une atmosphère. Elles donnent la troisième relation entre p, ρ, T. On retombe sur le problème précédent de l'équilibre adiabatique, dans le cas où le rapport des chaleurs spécifiques serait $\frac{4}{3}$. On a les mêmes formules et les mêmes résultats.

Eddington ajoute accessoirement la considération de la pression de radiation, qui diminue la pesanteur des couches, mais ne joue qu'un rôle insignifiant dans les étoiles naines ou normales, comme le Soleil. Pour ces dernières il introduit la loi des gaz réels, mais en ramenant les formules à celles des gaz parfaits. Il reconnaît lui-même que les formules déduites ne s'appliquent pas aux couches superficielles, ni même à l'évolution des astres, car il introduit la chaleur

régénérée par la masse pour entretenir le rayonnement et rien ici ne détermine la variation de cette chaleur. Aussi les formules, relations entre la masse, la température, etc., sont-elles indépendantes du temps. C'est un équilibre absolu. Chapman montre que ces formules ne s'appliquent plus du tout pour le mélange de deux gaz de poids moléculaires différents.

J'ai démontré que l'équilibre radiatif était d'ailleurs impossible. L'augmentation de température serait telle que la densite finirait par décroître. Les couches intérieures remonteraient à la surface. (*C. R.*, 1925).

34. **Équilibre thermodynamique dans le cas d'un gaz réel. A. Véronnet.** — La formule des gaz parfaits est inapplicable à partir de quelques milliers d'atmosphères et dans les astres c'est par millions et milliards d'atmosphères qu'il faut compter. Il faut prendre les formules plus complètes des gaz réels.

Les démonstrations mathématiques de la loi des gaz introduisent toutes une densité limite ρ_0, vers laquelle tend la densité du gaz aux très hautes pressions et qui dépend seulement de la température. On a la formule

$$p\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)=\frac{R}{\mu}T. \tag{4}$$

Il faut également une troisième relation. Mais il est arbitraire de déterminer *a priori* l'espèce d'équilibre, qui doit être réalisée dans les astres. Il faut les étudier successivement, déterminer des cas limites entre lesquels la réalité sera sûrement comprise. Ces cas limites sont l'équilibre isothermique, où l'accroissement de densité est maximum et le cas de densité uniforme, où l'accroissement de température est maximum. L'équilibre adiabatique est un équilibre moyen, compris entre les deux. J'ai fait l'étude de ces différents cas et de leurs applications.

Dans le cas de l'équibre isothermique, en prenant les dérivées par rapport à r, éliminant p dans (4) et (2'), on a

$$\frac{\rho''r}{\rho'}=\frac{\rho'r}{\rho}\,\frac{1-3\rho}{1-\rho}+\frac{g'r}{g}, \tag{5}$$

avec $\rho_0=1$. Cette formule montre qu'il y a toujours un point d'inflexion dans la courbe des densités, qu'il y a toujours un noyau plus

condensé dans une masse gazeuse en équilibre isothermique. Pour la grande majorité des astres, depuis des masses 1000 fois plus petites que le Soleil, ou d'un volume 1000 fois plus grand, la densité moyenne de ce noyau est plus grande que la moitié de la densité limite du gaz. Le point d'inflexion est alors très voisin de la couche, où la densité égale le tiers de la densité limite. Pour le Soleil et les étoiles analogues, la variation est extrêmement brusque. La densité croît de 0,1 à 0,9 sur quelques kilomètres seulement. On a un véritable seuil, qui délimite nettement l'atmosphère, et un noyau sensiblement homogène.

Dans le cas d'un mélange de gaz, le noyau reste encore sensiblement homogène, mais les gaz s'échelonnent dans l'atmosphère par ordre de densité. On peut déterminer mathématiquement la hauteur où chacun d'eux s'élève et la limite de l'atmosphère extérieure, comme celle du noyau. Les différentes apparences spectrales peuvent se déduire de cette répartition avec la température.

Dans l'hypothèse d'une densité uniforme, le calcul montre que la température centrale ne peut pas dépasser le triple et pratiquement le double de la température à la surface du noyau, dans le cas précédent. C'est un maximum. On en conclut que les conditions physiques à l'intérieur des étoiles ne peuvent pas être très différentes des conditions connues à la surface.

On démontre encore que, dans le cas d'une dilatation homogène, une couche quelconque passe par un maximum de température, quand sa densité atteint le quart de la densité limite du gaz. Ceci permet de déterminer l'évolution complète d'une masse gazeuse, supposée en équilibre thermodynamique, depuis l'état de nébuleuse dilatée et froide jusqu'à celui d'étoile condensée et déjà refroidie, en passant par un maximum de température qui serait de l'ordre de 50 millions de degrés, pour une étoile analogue au Soleil. On aurait bien là l'évolution d'une étoile d'après le cycle classique de N. Lockyer, dans le cas d'une masse isolée (problème cosmogonique restreint). Mais l'équilibre physique n'a pu être réalisé qu'au voisinage de l'état actuel. Une température beaucoup plus élevée aurait rendu tout état d'équilibre impossible, ou aurait été même impossible à réaliser.

Dans l'hypothèse de l'équilibre adiabatique on trouve, pour la variation des densités, et pour la variation des températures, des formules intermédiaires entre celles des deux cas précédents. On trouve

un noyau, sensiblement homogène, à température sensiblement uniforme, où la variation brusque entre l'atmosphère et le noyau est du même ordre que précédemment. C'est le cas général.

35. **Température d'équilibre dans la formation d'un astre.** — Les couches successives, qui s'incorporent à la masse m déjà formée, transforment leur force vive en chaleur. L'équilibre de température s'établit quand la chaleur rayonnée (loi de Stefan) est égale à la chaleur acquise. On obtient les formules

$$(6) \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{r}{f\rho m}\sigma T^4 \qquad \text{et} \qquad t = \frac{1}{3} f \frac{\rho M}{\sigma T^4},$$

σ est le coefficient de Stefan, f celui de la gravitation, m la masse contenue dans la sphère de rayon r, et M la masse totale. La seconde formule donne le temps de formation total dans le cas d'une densité et d'une température uniformes. Pour les autres cas, le coefficient seul est modifié et reste du même ordre. Le temps t et la température T varient en sens inverse et se limitent étroitement. En donnant au Soleil sa température actuelle comme température de formation (minimum), le temps exigé pour cette formation serait de 80 millions d'années (maximum). Pour que sa température ait atteint le triple de la température actuelle, il aurait fallu qu'il se forme en 1 million d'années seulement. Les conditions physiques d'équilibre des étoiles depuis l'origine n'ont pas dû être très différentes des conditions actuelles.

Les mêmes formules permettent de déterminer la température de chaque couche dans la formation normale du Chapitre précédent. Il y a un maximum de température, après lequel on peut considérer que la formation de l'astre est terminée et que son évolution commence (A. Véronnet).

36. **Sens de la variation de la température d'équilibre. Sens de l'évolution.** — Dans une masse gazeuse, qui se dilate ou se contracte, la loi de l'équilibre restant la même, on a, dans le cas des gaz parfaits (H. Lane, Poincaré, p. 222),

$$(7) \qquad rT = \text{const.}, \qquad dQ = (\tfrac{4}{3}c - 3C)\,dT.$$

La température varie en raison inverse du rayon. La parenthèse est

négative pour les gaz mono et biatomiques. La température augmente, quand la masse rayonne et perd de la chaleur, $dQ < 0$. La masse s'échauffe et se contracte indéfiniment. La parenthèse est positive au contraire pour les molécules plus condensées. La masse se refroidirait et se dilaterait en rayonnant, arrivant très vite au zéro absolu, ou à la température de l'espace.

Avec la loi des gaz réels, on obtient

$$\frac{dQ}{dT} = \frac{4\rho c - (4c - 3C)\rho_0}{4\rho - \rho_0}. \tag{8}$$

Dans l'atmosphère, pour les faibles densités, on a les mêmes résultats que pour les gaz parfaits. Partout où la densité dépasse le quart de la densité limite du gaz, la chaleur spécifique est positive. On en conclut que la masse presque entière se refroidit et se contracte en rayonnant de la chaleur. C'est l'évolution normale des étoiles, qui se comporteront, pratiquement, comme des liquides.

On peut alors relier le rayon à la température par une loi de dilatation et déterminer l'évolution totale et ses phases, au moyen de la loi du rayonnement de Stefan. La chute de température, rapide au début, devient excessivement lente. Pour le Soleil, elle mettra plus de 10 millions d'années pour baisser de moitié. Elle n'aurait mis qu'un million d'années pour tomber d'une température quelconque à la température actuelle. Le refroidissement corrélatif de la Terre serait de 5° en 100000 ans.

En admettant le même temps de formation et d'évolution pour toutes les étoiles depuis l'origine, la température est reliée à la masse et au rayon par les formules

$$T^5 = kM, \qquad T^2 = k'R, \tag{9}$$

k et k' étant des constantes. Ces formules de première approximation, qui englobent à la fois le temps de formation et le temps d'évolution, se trouvent assez bien vérifiées par les différentes classes spectrales.

Chaque étoile serait restée les $\frac{4}{5}$ de son existence sensiblement dans la même classe spectrale, sauf accident, comme pour les étoiles nouvelles.

D'ailleurs en remontant l'ordre des températures, il apparaît une *température critique*, au delà de laquelle la pression de radiation chasse les particules de la photosphère, au delà de l'atmosphère nor-

male, dans une atmosphère d'électrons libres, pour constituer une enveloppe extérieure, à température plus basse et à grand rayon. Dans ces *étoiles géantes*, l'enveloppe extérieure se contracte en augmentant de température jusqu'à ce qu'elle ait rencontré le noyau de l'étoile centrale. A partir de là (maximum), la température décroît normalement, avec la contraction. C'est le cycle d'évolution de N. Lockyer et Russell.

37. **La dégradation de l'énergie et la mort de l'Univers. Arrhénius. La concentration de l'énergie et la vie éternelle de l'Univers.** — La loi du rayonnement de Stefan permet de déterminer la température de la Terre d'après celle du Soleil. Elles sont proportionnelles. L'observation vérifie le calcul. On en conclut que la Terre transportée à la distance de Mars serait glacée.

Le Soleil se refroidit et la Terre fera de même, à moins qu'elle ne s'en rapproche assez vite, par suite de la résistance du milieu. Dans les étoiles le travail de la contraction se transforme en chaleur, qui se disperse. Le principe de la dégradation de l'énergie conduit à la mort de l'Univers. Pour y échapper, Arrhénius a inventé des mécanismes qui jouent le rôle du démon de Maxwell et utilisent mieux l'énergie, en la transportant des étoiles aux nébuleuses, lesquelles se transforment en étoiles et ainsi de suite. Mais il suffit qu'il y ait un seul phénomène irréversible, pour que la dégradation se poursuive indéfiniment.

Dans un univers infini cela peut demander un temps infini. La dégradation peut se poursuivre asymptotiquement, comme elle a pu s'établir asymptotiquement à l'origine. Nous serions entre deux infinis de temps.

D'ailleurs, l'évolution cosmique est à peine commencée. Si la condensation des étoiles est à peu près achevée, celle des amas d'étoiles s'ébauche à peine. Celle des étoiles a demandé des millions d'années, celle des amas demandera des milliards et plus. Toutes les étoiles d'un amas finiront par former un seul astre, dont l'évolution sera incommensurablement plus longue que celle d'une étoile. La vie de notre planète ne sera qu'une seconde au regard de la vie de ces Terres nouvelles, dont notre Terre d'ailleurs pourra faire partie.

Les amas d'amas et les Voies Lactées se condenseront à leur tour et ainsi de suite indéfiniment. Si les centres de chaleur et de lumière

deviennent de moins en moins nombreux, ils deviendront aussi de plus en plus puissants, et sans cesse ainsi l'Univers reprendra une nouvelle vie, agglomérant les débris des vieux mondes qui paraîtront morts, reformant de nouveaux organismes avec des cellules usées, pour permettre une nouvelle phase de l'évolution.

Après les électrons, ce sont les atomes qui apparaissent, après les atomes ce sont les étoiles, après les étoiles les Voies Lactées. D'un autre côté, après la matière, c'est la vie, après la vie c'est la pensée qui apparaît. La loi de la gravitation permet d'entrevoir où et dans quel sens évoluera la matière, non pas vers la mort, mais vers la vie. Aucune loi de l'esprit ne permet au penseur d'entrevoir dans quel sens évoluera éternellement la vie, et la pensée, dont l'homme n'est encore qu'une faible ébauche.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

Ouvrages principaux.

H. Poincaré. — *Figures d'équilibre d'une masse fluide* (1903).
— *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques* (1912).
P. Appell. — *Traité de Mécanique rationnelle*, t. IV, *Figures d'équilibre* (1920).
P. Pizetti. — *Principii della theoria meccanica della figura dei pianeti.*
O. Bianco. — *Il problema meccanico della figura della Terra*, 2 vol. (1880, 1885).
F. Helmert. — *Höhere Geodäsie* (1880, 1884).
A. Clairaut. — *La théorie de la figure de la Terre* (1743).
J. Todhunter. — *A history of a math. theories of attraction and the figure of the earth from the time of Newton to that of Laplace*, 2 vol. (1873).
A. Véronnet. — *Rotation de l'ellipsoïde hétérogène et figure exacte de la Terre* (*Thèse et Journ. de Math.*, 1912).
— *Les Hypothèses cosmogoniques modernes* (1914).
— *Constitution et évolution de l'Univers* (1926).
F. Tisserand. — *Traité de Mécanique céleste*, t. IV.
E. Roche. — *Mémoires de l'Académie des Sciences de Montpellier* (1842 à 1881).
J. Bosler. — *Les théories modernes du Soleil* (1910).
— *L'évolution des étoiles* (1924).
E. Eddington. — *Stellar movements and structure of Universe* (1914).
J.-H. Jeans. — *Problems of cosmogony and stellar dynamics* (1919).
S. Oppenheim. — *Encyklopädie der mathem. wissens*, B. VI, 2 (1923).

Mémoires.

1. C. Maclaurin, *A treatise on fluxions* (Edimbourg, 1742). — Jacobi, Ueber die figur des Gleichgewichtes (*An. Phys.*, 33, 1834, p. 229, et *Conn. des Temps*, 1837).

2. Simpson, *A. mathem. diss. on the figure of the earth* (1743). — D'Alembert. Sur la figure de la Terre (*Opusc. math.*, 1773). — Laplace, *Méc. cél.*, III, Chap. III, n° 19. — Ivory, On the figure requisite to maintain ... (*Phil. Trans.*, 30, 1824, p. 141). — Liouville, Sur les ellipsoïdes à trois axes inégaux (*Comptes rendus*, 16, 1843, p. 216; *Conn. des Temps*, 1846, p. 85; *J. de Math.*, 1851, p. 241).

3. Laplace, *Méc. cél.*, III, Chap. III, n° 21. — Liouville, *loc. cit.* — O.-E. Meyer, De æquilibri formis ellipsoïdicis (*J. f. Math.*, 24, 1824, p. 44). — Plana, Sur l'état d'équilibre de l'ellipsoïde à trois axes inégaux (*Astr. Nach.*, 36, 1853, p. 313). — Kostka, Ueber die Auffindung ellip. Gleich. (*Berl. Ber.*, 1870, p. 116). — J. Krüger, *Evenwichtsformen*, p. 75, Leiden. 1896.

4. A. Véronnet, Figures ellipsoïdales d'équilibre. Variation du grand axe (*J. de Math.*, 1919, et *Comptes rendus*, 169, p. 320). — H.-C. Plummer (*Monthly Not.*, 80, 1919, p. 26).

5 et 6. H. Poincaré, Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation (*Act. math.*, 7, 1885, et *Comptes rendus*, 1885, 1886, 1887). — — Liapounoff, Sur la stabilité des formes d'équilibre ellipsoïdales (Saint-Pétersbourg, 1884, traduction Davaux; *Ann. Toulouse*, 1904); Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes... (Saint-Pétersbourg, 4 vol., 1906, 1909, 1911, 1913); Recherches sur la théorie de la figure des corps célestes (Saint-Pétersbourg, Mém. 14, 1903); Sur un problème de Tschebytcheff (17, 1906). — G.-H. Darwin, On figures of equil. of rotating masses of fluid. (*Phil. Trans.*, 178, 1887); Ellips. harmonic analysis (197, 1901); The pearshaped fig. of. equil. (198, 1902); On the integrals of the squares of ellip. surf. harm. fonct. (203, 1904). — P. Humbert, Sur les surfaces de Poincaré (*Thèse*, 1918, Paris; *Ann. Éc. Norm.* et *Comptes rendus*, 1915, 1916, 1918, 1919). — A. Véronnet, Ordre de succession des figures critiques de bifurcation (*Comptes rendus*, 120, 1920, p. 1303).

7. H. Poincaré, Sur l'équilibre d'une masse fluide... (*Bul. astr.*, 2, 1885, p. 100); Figures d'équilibre (p. 11). — Crudeli, Nuovo limite super. della velocita angolari (*Ac. Lincei*, 1910, 19, 1, p. 666, et 19, 2, p. 41, et *Nuovo Cim.*, 17, 1908, p. 168). — Lichtenstein, Ueber einige Eigensthaften der Gleichgewichtsfiguren... (*Berl. Ber.*, 1918, p. 1120, et *Math. Zeits.*, 1, 1918 et 5, 1919. — A. Véronnet, *Thèse*, p. 18, et *J. de Math.*, 1919, p. 217-223. — Terradas, Les figures d'équilibre (*Scientia*, t. 24, p. 1 et 98).

8. H. Poincaré, *Act. mathem.* 7., et Sur la stabilité des figures piriformes (*Phil. Trans.*, 198, 1902; *Comptes rendus*, 104, 1887. — Liapounoff,

Sur la stabilité... (1884); Problème de minimum dans une question de stabilité (*Ac. Sc. de Saint-Pétersbourg.*, 22, 1908. — G.-H. Darwin, The stability of the pearshaped figure... (*Phil. Trans.*, 203, 1903, et 208, 1908). — J.-H. Jeans, Potential of ellips. bodies and the fig. of. équil... (*Phil. Trans.*, 214, 1914). — P. Duhem, Sur la stabilité d'une masse fluide... (t. 3, 1897, t. 7, 1901; t. 9, 1902). — D'Alembert, *loc. cit.* — Laplace, *Méc. cél.*, Livre III, Chap. IV. — Airy, *Encycl. Brit.*, 1843. — Dirichlet, *J. f. Math.*, 58, 1861. — Thomson and Tait, *Treatise on nat. Philosophy*, 1883. — Riemann, *Gött. Nach.*, 9, 1861. — Steckloff, *Ann. Toulouse*, 1902; *Comptes rendus*, 1905, 1906. — Schwarzschild, *Dissert. München*, 1896. — P. Humbert, *Comptes rendus*, 1902.

9. J.-H. Jeans, Problems of cosmogony and stellar dynamics (1919). — Moulton, On the possibility of fission of an contracting rotating fluid mass (*Astroph. J.*, 29, 1919) et les différents Mémoires sur la stabilité et la figure piriforme (n° 8 ci-dessus).

10. Mathiessen, Kiel. univ. Schrift. (1857). — J.-H. Jeans, On the equil. of rotating liquid cylinders (*Phil. Trans.*, 200, 1902). — B. Globa-Mikaïlenko, *Comptes rendus*, 163, 1916, p. 700; *Nouv. Ann. de Math.*, 16, 1916, p. 506; *J. de Math.*, 7, 1916, p. 1. — Insolera, Figure ellit. di equil. di un velo piano liquido rotante (*Circ. math. Palermo.*, 18. 1904, p. 16).

11. M. Hamy, Étude sur la figure des corps célestes (*Thèse*, Chap. I et II; *Ann. Obs. de Paris*, 19, 1887) et Théorie de la figure des planètes (*J. de Math.*, 1890). — H. Poincaré, Sur l'équilibre d'une masse hétérogène (*Comptes rendus*, 107, 1888, p. 1571, et *J. de Math.*, 1890). — Volterra, Sur la stratification d'une masse fluide en équilibre (*Acta math.*, 27, 1903, p. 105). — A. Véronnet, *Thèse*, Chap. I et II.

12. A. Clairaut, p. 247, 273, 276. — Laplace, *Méc. cél.*, Livre III, Chap. IV. — Legendre, Suite de la recherche sur la figure des planètes (*Mém.*, 1789, p. 372). — Poisson, Mémoire sur l'attraction des sphéroïdes (*Conn. des Temps*, 1829, p. 329). — Callandreau, Sur le développement en série du potentiel des sphéroïdes de révolution (*Journ. de l'Éc. Polyt.*, 58, 1889, p. 128). — H. Poincaré, Chap. III et IV. — A. Véronnet, Chap. III. — Tisserand, *Comptes rendus*, 99, 1884, p. 399, et *Bull. Astr.*, 1, 1884, p. 417; *Méc. cél.*, t. II, p. 220. — Radau. Remarque sur la théorie de la figure des planètes (*Bull. astr.*, 2, 1885).

13. D'Alembert, Recherches sur la précession des équinoxes (1749). — Callandreau, Remarques sur la théorie de la figure de la Terre (*Bull. astr.*, 5, 1888, p. 472, et 6, 1889).

14. A. Clairaut, p. 250. — Saigey, *Petite Physique du globe*, II, p. 185. — Tisserand, *Méc. cél.*, II, p. 244; *Bull. astr.*, 4, p. 234. — A. Véronnet, *Comptes rendus*, 171, p. 547; *Thèse*, Chap. VII. — Stieltjes, *Bull. astr.*, 1, p. 465, et *Arch. néerl.*, 19. — Radau, *Bul. astr.*, 2, p. 159, et *Comptes rendus*, 100, p. 972. — M. Hamy, *J. de Math.*, 1890, p. 123. — Roche. *Acad. de Montpellier*, 1848, 1881. — G.-H. Darwin, *Monthly Notices*, — 37, 1876, p. 77. — Laplace, *Méc. cél.*, III, Chap. IV, n° 35, et VII.

Chap. II et III. — Hill, Lunar inœqualities due to the ellipticity of the earth (Washington, 1884). — Hansen, Darlegung der theor. Bech. der in den Mondtafeln... (*Leipzig Ak. Ber.*, 9 et 11, 1862 et 1864). — E. Brown, The determ... the earth's ellipticity... from observ. of the moon. (*London, Not. R. astr. Soc.*, 1921).

15. Radau, Théorie de la figure de la Terre (*Bull. astr.*, 2, 1885, p. 157; *Comptes rendus*, 100, 1885). — H. Poincaré, Sur la figure de la Terre (*Comptes rendus*, 107, 1888, p. 67 et *Bull. astr.*, 6, 1889, p. 5 et 49). — A. Véronnet, *Thèse*, Chap. IV. — Tisserand, Sur la théorie de la figure de la Terre (*Comptes rendus*, 99, 1884, p. 399 et 577; *Bull. astr.*, 1, 1884, p. 417 et 526; *Annales de l'Obs. de Paris*, 1885, — Callandreau, *Comptes rendus*, 100, 1885, p. 37, 163 et 1204; *Bull. astr.*, 5, 1889, p. 473, et 6, 1890, p. 192. — Lévy, *Comptes rendus*, 106, 1888. — Clarke, *Geodesy*, 1880. — Faye, *Comptes rendus*, 90, 1880.

16. Tisserand. Mémoires cités. — A. Véronnet. *Thèse*, Chap. VII. — M. Hamy, *Thèse*, Chap. III. — G.-H. Darwin, 37, 1876.

17. Airy, The figure of the earth (*Phil Trans.*, 3, 1826, et 32, 1864). — Callandreau, Sur la théorie de la figure des planètes (deux Mémoires) (*Ann. de l'Obs. de Paris*, 19, 1889). — Wiechert, *Nachr. k. Gesell. zu Gött.*, 1896. — G.-H. Darwin, The theory of the fig. of the earth carried to the second order... (*Monthly Notices*, 60, 1899, p. 82). — A. Véronnet, Chap. V, et *Comptes rendus*, 171, 1920.

18. Laplace, *Méc. cél.*, V, Chap. X. — H. Poincaré, *Bull. astr.*, 1910. — Lallemand, Note A (*Ann. Bureau des Long.*, 1909). — L. Picart, *Ann. Obs. Bordeaux*, t. 7. — A. Véronnet, *Thèse*, Chap. VI. — N. Liapin, Astr. Kalendari (*N. Novgorod*, 28, 1912). — P. Humbert, *Congrès de l'A. F. A. S.*, Bordeaux, 1923. — J.-H. Jeans.

19. D'Alembert, Sur les atmosphères des corps célestes (*Opusc. mathem.*, t. 6, 1773). — P. Laplace, *Méc. cél.*, III, Chap. VII. — Roche, Recherches sur les atmosphères des corps célestes (*Obs. Paris*, 5, 1859). — A. Véronnet, Sur la limite et l'extension d'une atmosphère (*Comptes rendus*, 167, 1918, p. 528, 636).

20. H. Poincaré, Chap. II. — P. Laplace, *Méc. cél.* Note VII, *Exposition du système du monde* (1796). — E. Roche, Mémoire sur la figure des atmosphères des corps célestes (*Ac. Sc. Montpellier*, 2, 1854; 5, 1863; 8, 1875. — A. Véronnet, Chap. III. — Trowbridge, On the nebular hypothesis (*J. of Sc.*, 2e série, t. 38, 1864, p. 344). — Fouché, *Comptes rendus*, 99, 1884, p. 903.

21. E. Roche, Sur la figure d'une masse fluide soumise à l'attraction d'un point éloigné (*Montp.*, 1, 1847-1850; 2, 1854); Recherches sur les comètes (*Paris. Mém. Inst.*, 16, 1848); Sur les atmosphères des comètes (*Obs. Paris*, 5, 1859; *Montp.*, 2, 1860). — Schiaparelli, Entwurf einer astron. Theorie der Sternschnuppen, Chap. VIII. — M. Charlier, *Bull. Ac. Sc. Saint-Pétersbourg.*, 32, n° 3, 1888. — L. Picart, Sur la désagrégation des essaims météoriques (*Ann. Obs. Bordeaux*, 5, 1892; *Thèse*. — F. Bessel.

Abhandlungen, 1, et *Ast. Nach.*, 13, 1836. — Pape, *Astr. Nach.*, 1172-1174. — Radau, *Bull. astr.*, 1, p. 194. — Hepperger, *Astr. Nach.*, 2576. — Th. Bredichin, *Annales de l'Obs. Moscou*, 1 vol. (1903). — A. Véronnet, Sur la formation des étoiles nouvelles (*Comptes rendus*, 172, 1921, p. 666, 957; *Congrès A. F. A. S.*, 1921, 1922).

22. P. Laplace, *Méc. cél.*, III. Chap. VII. — E. Roche, n° 21. — H. Poincaré, *Hyp. cosm.*, Chap. VII. — G.-H. Darwin (*voir* n° 5) et On the fig. and stab. of a liquid satellite (*Phil. Trans.*, 206, 1906, p. 161). — K. Schwarzchild, Die Poincaresche Theorie des Gleichgewichtes... (*Dissert. München*, 1896). — Franz, Die Figur des Mondes (*Königsberger Sterw. Beob.*, 38, 1899). — Mathiessen, *Zeits. f. math.*, 25, 1880, p. 72.

23. P. Laplace, *Méc. cél.*, II, Chap. VI et III, Chap. VI. Mémoire sur la théorie de l'anneau de Saturne (1787). — F. Tisserand, *Méc. cél.*, II, Chap. IX; Mémoire sur l'anneau de Saturne (*Obs. Toulouse*, 1, 1880). — S. Kowalewski, Zusätze und Bemerkungen... Saturnringe (*Astr. Nach.*, 111, 1885, p. 37). — H. Poincaré, Sur l'équilibre d'une masse fluide (*Bull. astr.*, 2, 1885, p. 109 et 404). — Klumpke, Contribution à l'étude des anneaux de Saturne (*Ann. Obs., Paris*, 21, 1895). — Maxwell, On the stability of the motion of Saturn's ring (Cambridge, 1859); *Scient. papers*, 1, 288-374. — Callandreau, Sur les calculs de Maxwell... (*Bull. astr.*, 7, 1890, p. 69). — Levi-Civita, *Atti Lincei Rom.*, 18, 1908, p. 1 et 453; *Atti Inst. Venet.*, 68, 1909, p. 557; *Circ. math. Palermo*, 33, 1912. — E. Kant, *Théorie du ciel* (1755), traduction Wolf. — Hirn, Le monde de Saturne (*Bull. Soc. Colmar*, 1872).

24. Seeliger, *Scientia*, 1, 1914, p. 160. — Wundt, *Viertelj. f. wissenslh. Phil.*, 1, 1877, p. 104. — Borel, *Comptes rendus*, 174, 1922, p. 977, et 175, p. 1046. — W. Mac Millan, La densité de l'Univers peut-elle être finie ? (*Comptes rendus*, 175, 1922, p. 1044; *Scientia*, 1922). — A. Véronnet, Notre Univers est-il fini ou infini ? (*Rev. gén. Sc.*, 1923). — C. Charlier, How an infinite world may be built up. (*Arkiv. f. math.*, 16). — Lémeray, *Comptes rendus*, 1922. — E. Eddington, *Space, time and gravitation*, trad.

25. H. Faye, *Sur l'origine du monde* (1884). — Th. Wolf, *Les hypothèses cosmogoniques* (1886) suivie de la traduction de la *Théorie du ciel* de Kant. — Du Ligondès, *Formation mécanique du système du monde* (1897). — E. Belot, *Essai de cosmogonie tourbillonnaire* (1922), et *Comptes rendus*, 1914 à 1924. — Abbé Moreux, *Origine et formation des mondes* (1922). — A. Véronnet, Chap. IV et V. — L. Maillard, *Quand la lumière fut*, 2 vol. (1923). — P. Busco, *Les cosmogonies modernes* (1924). — N. Lockyer, *L'évolution inorganique* (1905) ; *The meteoritic hypothesis* (1890). — J. Sef, *The capture theory of cosmical evolution* (1910); *Scientia*, 1912. — Ch. André, *Les planètes et leur origine*. — T. Chamberlin, The planetesimal hypothesis (*Scientia*, 16, p. 65 et 165).

26 et 27. H. Poincaré, Chap. V et XII. — C. Charlier, *Archiv. f. math.*, 22, *Medd. Lund Obs.*, n° 98. — Kapteyn, *Groningen Public.*, n° 8, 11 et 18, *Monthly Not.*, 72, p. 743. — K. Schwartzschild, Zur Stellarsta-

tistik (*Astr. Nach.*, 150, p. 361). — Kobold, *Astr. Nach.*, n° 3457. — Zeipel, Recherches sur la constitution des amas globulaires (*K. Sv. Vel. Handl.*, 51, n° 5, et *Ann. Obs. Paris*, 25). — E. Eddington, The dynamics of a globular stellar system (*Monthly Not.*, 74, p. 5; 75, p. 366, et 76, p. 37); The Kinetic energy of a star cluster (*Monthly N.*, 76, p. 525 et 572). — L. Courvoisier (*Astr. Nach.*, 1926) conclut à un déplacement de la Terre, par rapport à l'éther, et par conséquent du Soleil et de toutes les étoiles de la Voie Lactée, de 800 km : sec, avec le même apex que celui des nébuleuses spirales.

28 A. Véronnet, Formation d'un astre isolé dans une nébuleuse homogène indéfinie (*Comptes rendus*, 170, 1920, p. 40; Formation d'un ensemble d'astres (*Ibid.*, 171, 1920, p. 702). — E. Kant, *Théorie des Himmels*. — H. Poincaré, Chap. I.

29. J.-J. Sée, *Researches on the evolution of the stellar systems*, 2 vol. (trad. chez Hermann, 1910); *The capture theory of cosmical evolution*. — A. Véronnet, Sur la formation des systèmes planétaires et des systèmes stellaires (*Comptes rendus*, 177, 1923, p. 644), ... milieu résistant (*Ibid.*, 172, 1921, p. 267, 666, 957; 1923, p. 749; *Bull. astr.*, 1, 1921, 1922). — J. Chazy, *Bull. astr.*, 1923. — Fatou, *Bull. astr.*, 1922. — J. Bosler, *Scientia*, 1922. — Tisserand, *Méc. cél.*, t. IV.

30. Helmholtz, *Theoretische Physik*. (1854). — R. Mayer, *Beiträge zur Dyn. des Himmels* (1848). — W. Thomson, *Constitution de la matière* (trad. Lugol (1893). — J. Briner, Le problème chimique du rayonnement solaire (*Rev. gén. Sc.*, 1916). — J. Perrin, Origine de la chaleur solaire (*Ann. de Phys.*, 1919, *Revue du Mois*, 1920; *L'Astronomie*, 1922). — A. Véronnet, Les théories modernes de l'entretien de la chaleur solaire (*Rev. gén. Sc.*, 1923; *Comptes rendus*, 158, 1914); L'âge de la Terre (*L'Astronomie*, 1924).

31. W. Thomson (Lord Kelvin), *voir* n° 30. — P. Rudski, L'âge de la Terre (*Scientia*, 13); *Physik der Erde* (Leipzig, 1911). — H. Joly, *Trans. roy. Dub. Soc.* 7., 1902; *Phil. Mag.*, 1911). *Nature*, 109, 1922. — J. Bosler, L'âge de la Terre (*L'Astronomie*, 26, 1912).

32. J.-H. Lane, *Amer. Journal*, 50, 1870, p. 57. — W. Thomson, Sur l'équilibre d'un gaz sous l'action de la seule gravitation (*Phil. Mag.*, 5e série, 23, 1887, p. 287). — J.-J. Sée. Researches, on the physical constit. of the heavenly bodies (*Astr. Nach.*, 169, 1905, p. 321). — Emden, *Ann. der Physik*, 7, 1902, p. 176, et *Gaskugeln* (1907). — Ritter, *Astroph. J.*, 8, p. 307.

33. E. Eddington, On the radiative équil. of the stars (*Monthly Not.*, 77, 1917, p. 16 et 596); On the conditions in the interior of a star (*Astroph. J.*, 48, p. 205; *Scientia*, 1918; *The Observatory*, 1920). — K. Schwarzschild, *Gottingen Nach.*, 1906, p. 41. — J.-H. Jeans, *Monthly Not.*, 77, 1917. — S. Chapmann, *Monthly Not.*, 77, 1917. — J. Bosler, *L'évolution des étoiles*, Chap. IV. — A. Véronnet, L'équilibre radiatif. *Comptes rendus*, 1925; *Bul. astr.*, 1926.

34. A. Véronnet, Constitution physique du Soleil et des étoiles étudiés au moyen de la formule des gaz réels (*Bull. astr.*, 35, 1918, 2e série, 1, 1921; 3, 1923; *Comptes rendus*, 165, 1917, p. 1035; 166, p. 109); Contraction d'une masse gazeuse et évolution du Soleil (*Comptes rendus*, 166, 1918, p. 286, 642, 812, 901; 167, 1918, p. 67; 178, 1924). — E. Eddington, *Monthly Not.*, 1917, p. 16.

35. H. Poincaré, Chap. VIII. — A. Véronnet, *Comptes rendus*, 169, 1919, p. 844; 170, 1920, p. 1565; 171, p. 707.

36. H. Poincaré, Chap. VIII, n° 3. — E. Eddington, *Astroph. J.*, 48, p. 205. — A. Véronnet, *Comptes rendus*, 166, 1918, p. 286; 170, 1920; *Bull. astr.*, 2e série, 1, 1921. Refroidissement et évolution du Soleil (*Comptes rendus*, 166, p. 642, 812, 901; *L'Astronomie*, 1918; *Rev. gén. Sc.*, 1919).

37. H. Poincaré, Chap. XI. — S. Arrhénius, L'évolution des mondes. Le problème de la Voie Lactée (*Scientia*, 15, p. 349). Chimie physique et cosmique (Chap. VII, 1922).

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE I.

FIGURES D'ÉQUILIBRE D'UN LIQUIDE HOMOGÈNE EN ROTATION.

Pages.

1. Les figures ellipsoïdales d'équilibre. Ellipsoïdes de Maclaurin et ellipsoïdes de Jacobi. Formules générales 2
2. Première discussion. Vitesse de rotation variable et densité constante ou réciproquement 3
3. Deuxième discussion. Moment cinétique constant et variation de la densité 5
4. Troisième discussion. Variation du grand axe avec moment de rotation constant 6
5. Les figures dérivées des ellipsoïdes de révolution 7
6. Figures dérivées des ellipsoïdes à trois axes. La figure piriforme ou ovoïde 8
7. Les limites de la vitesse de rotation et de la force centrifuge 9
8. Stabilité des figures d'équilibre 10
9. Dédoublement et cosmogonie 12
10. Le cylindre elliptique indéfini 13

CHAPITRE II.

FIGURES D'ÉQUILIBRE D'UNE MASSE HÉTÉROGÈNE. FIGURE DE LA TERRE ET DES PLANÈTES.

11. Étude du cas général. Résultats de M. Hamy 14
12. Le problème de Clairaut. Premières limites de l'aplatissement 16
13. Moments d'inertie. Formule de d'Alembert. Nouvelles limites de l'aplatissement 18
14. Variation de la pesanteur. Densité centrale. Aplatissement donné par l'action de la Lune 18
15. Le problème de H. Poincaré. Les limites rigoureuses de l'aplatissement 19
16. Déterminations précises de l'aplatissement théorique. La loi des densités à l'intérieur de la Terre 21
17. Calculs et résultats en seconde approximation. Autres formes 23
18. Hypothèses autres que celle de la rotation uniforme. Précession dans le cas de vitesses de rotation variables. Tremblements de terre et charriages 25

CHAPITRE III.

AUTRES FIGURES D'ÉQUILIBRE. CAS D'UN ASTRE PERTURBATEUR. ÉQUILIBRE D'UNE ATMOSPHÈRE.

Pages.

19. Le problème général de l'équilibre d'une atmosphère. Ses limites. Formules de Roche 27
20. L'hypothèse cosmogonique de Laplace. Les surfaces de Roche 29
21. De la figure des comètes 30
22. La figure de la Lune. Hypothèse cosmogonique de G.-H. Darwin 32
23. Les figures annulaires. Les anneaux de Saturne 33

CHAPITRE IV.

ÉQUILIBRE DYNAMIQUE DE L'UNIVERS ET DES SYSTÈMES STELLAIRES. LES COSMOGONIES.

24. Univers fini ou infini. La loi de gravitation reste applicable 35
25. Le problème cosmogonique restreint. Équilibre et évolution d'un système isolé. Les théories cosmogoniques 37
26. Hypothèse de l'état final ou de l'équilibre permanent 39
27. Hypothèse de l'état initial 41
28. Le problème cosmogonique général. Passage de l'homogène à l'hétérogène 42
29. Formation des systèmes planétaires et des systèmes stellaires. A. Véronnet. Résistance du milieu 44

CHAPITRE V.

ÉQUILIBRE THERMODYNAMIQUE DE L'UNIVERS. ÉVOLUTION.

30. Équilibre calorifique du Soleil et son entretien. Helmholtz 46
31. Équilibre calorifique de la Terre et son refroidissement. Lord Kelvin 47
32. Équilibre adiabatique d'une étoile. Cas d'un gaz parfait. Lane et Lord Kelvin 47
33. Équilibre radiatif d'une étoile. Schwarzschild et Eddington 48
34. Équilibre thermodynamique dans le cas d'un gaz réel. A. Véronnet 49
35. Température d'équilibre dans la formation d'un astre 51
36. Sens de la variation de la température d'équilibre 51
37. La dégradation de l'énergie et la mort de l'Univers. Arrhénius. La concentration de l'énergie et la vie éternelle de l'Univers 53

BIBLIOGRAPHIE 54

TABLE DES MATIÈRES 61

QA 1.M93 fasc13
3 9358 00261937 4

MATH

QA1
M93
fasc.13

Véronnet, Alexandre.
Figures d'équilibre et cosmogonie, par m. Alex. Véronnet. Paris, Gauthier-Villars, 1926.
62 p. 24 cm. (Mémorial des sciences mathématiques, fasc. 13)

261937

MATH

MBNU JAN 22,'75 1149247 NEMbp

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS et Cie

55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, PARIS (6e)

QA 1.M93 fasc13

3 9358 00261937 4

Envoi dans tou valeur sur Paris.
Frais de po Seine 22 520.

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Directeur : Henri VILLAT

Correspondant de l'Académie des Sciences,
Professeur à l'Université de Strasbourg,
Directeur du *Journal de Mathématiques pures et appliquées.*

Nouvelle Collection fondée sous le haut patronage de

L'Académie des Sciences de Paris
L'Académie Royale de Serbie (Belgrade),
L'Académie Royale des Sciences de Belgique (Bruxelles),
L'Académie des Sciences de Bucarest,
L'Académie des Sciences de Coïmbre,
L'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres (Cracovie),
L'Académie des Sciences de l'Ukraine (Kiew),
La Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales (Madrid),
L'Académie Tchèque des Sciences (Prague),
La Reale Accademia dei Lincei (Rome),
L'Institut Mathématique de l'Académie des Sciences de Suède
(Stockholm, fondation Mittag-Leffler),
La Société Mathématique de France, etc.,
avec la collaboration de nombreux savants.

Majoration 20 °/₀.

Fascicules parus :

Paul Appell. — Sur une forme générale des équations de la dynamique. (fasc. I). In-8 de 50 pages; 1925 ..... 12 fr.
G. Valiron — Fonctions entières et fonctions méromorphes (fasc. II). In-8 de 59 pages; 1925 ..... 12 fr.
Paul Appell. — Séries hypergéométriques de plusieurs variables, polynomes d'Hermite et autres fonctions sphériques de l'hyperespace (fasc. III). In-8 de 75 pages; 1925 ..... 12 fr.
M. d'Ocagne. — Esquisse d'ensemble de la Nomographie (fasc. IV). In-8 de 68 pages; 1925 ..... 12 fr.
P. Lévy. — Analyse fonctionnelle (fasc. V). In-8 de 56 pages; 1925 . 12 fr.
E. Goursat. — Le problème de Bäcklund (fasc. VI) in-8 de 53 p.; 1925. 12 fr.
A. Buhl. — Séries analytiques. Sommabilité (fasc. VII), 55 p.; 1926... 12 fr.
Th. de Donder. — Introduction à la Gravifique einsteinienne (fasc VIII), 53 p.; 1926 ..... 12 fr.
E. Cartan. — La géométrie des espaces de Riemann (fasc. IX), 58 p. 12 fr.
P. Humbert. — Fonctions de Lamé et fonctions de Mathieu (fasc. X), 56 p. 12 fr.
G. Bouligand — Fonctions harmoniques. Principes de Picard et de Dirichlet (fasc. XI) ..... 12 fr.
R. Gosse. — La méthode de Darboux pour les équations $s = f(x, y, z, p, q)$. (fasc. XII) ..... 12 fr.
A. Véronnet. — Figures d'équilibre et Cosmogonie (fasc. XIII) ..... 12 fr.

Fascicules sous presse :

A. Buhl. — Formules stokiennes.
R. Lagrange. — Calcul différentiel absolu.
G. Remoundos. — Extension aux fonctions algébroïdes du théorème de Picard et de ses généralisations.
A. Sainte-Laguë — Réseaux (ou Graphes).
G. Valiron. — Séries de Dirichlet.

77133-26 Paris. — Imprimerie Gauthier-Villars et Cie, 55, quai des Grands-Augustins.

NORTHEASTERN UNIVERSITY LIBRARY